Der Hauptsatz der Topologie in drei Dimensionen

unter Zugrundelegung des Schalensatzes

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde
der Hohen Philosophischen Fakultät
der Universität Rostock

vorgelegt von

Johannes Kusch
aus Wismar

Universitätsverlag von Robert Noske in Borna-Leipzig
1932

Am 28. Februar 1931 wurde einem Teil der vorliegenden Arbeit unter dem Titel

„Die Beziehungen zwischen dem Hauptsatz der Topologie in drei Dimensionen und den bisher gewonnenen Homöomorphiesätzen spezieller dreidimensionaler Gebilde sind darzulegen"

der Preis der Philosophischen Fakultät der Universität Rostock zuerkannt.

Referent: Professor Dr. R. Furch

Tag der mündlichen Prüfung: 24. Februar 1932

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

Meiner Schwester

Inhalt.

Seite

Einleitung: Formulierung des Hauptsatzes 1

1. Kapitel:

Einführende Hilfsmittel 3

§ 1. Die dreidimensionale Mannigfaltigkeit 3

§ 2. Die Zellmetrik eines kombinatorischen Schemas 5

I. Simplexmetrik 7

II. Sternmetrik 8

III. Metrische Operationen 10

1. Gesamtablösung einer Sphäre 11

2. Ablösung im engeren Sinne 12

3. Angleichung 13

4. M_g-Approximation 14

§ 3. Kombinatorische Umgebungen 14

§ 4. Die gleichmäßige Approximation 17

1. Das Dehnsche Lemma 18

2. Ablösung und Angleichung 18

3. Verweisung 18

4. Absorptionscharakter 18

§ 5. Der Schalensatz 19

2. Kapitel:

M_g-Approximation eines Systems von Rumpfumgebungen $Y^*(E^i)$ einer Mannigfaltigkeit $M^3(E^0, \ldots, E^3)$ 22

§ 6. Konstruktion von $\mathsf{Y}^*(E^0)$ 24

§ 7. Konstruktion von $\mathsf{Y}^*(E^1)$ 25

I. Die Konstruktionen innerhalb $Y(E^1)$ 25

1. Die sphärische Schale $\mathfrak{B}^3$ 25

2. Die M_g-Sphäre $\Sigma^{*2(1)}$ 26

II. Existenznachweis für die Deformation $\mathsf{D}^{(1)}$ 28

§ 8. Konstruktion von $\mathsf{Y}^*(E^2)$ 35

§ 9. Die gleichmäßige M_g-Approximation $\mathsf{M}^3(\mathsf{E}^0, \mathsf{E}^1, \mathsf{E}^2, \mathsf{E}^3)$ des Schemas $M^3(E^0, E^1, E^2, E^3)$ 37

§ 10. Konstruktion eines Grundschemas 39

Schluß: Konstruktion einer gemeinsamen Ableitung 40

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549208_0060

Literatur.

1. Furch: Zur Grundlegung der kombinatorischen Topologie. Hamburger Abhandlungen III (1924) S. 69 ff. (zit. als Furch I).
2. — Zur kombinatorischen Topologie des dreidimensionalen Raumes. Hamburger Abhandlungen III (1924) S. 237 ff. (zit. als Furch II).
3. — Schnitt zweier Sphären im R_3. Mathematische Ztschr. 28 (1928) S. 556 (zit. als S.S.).
4. — Polyedrale Gebilde verschiedener Metrik. Mathematische Ztschr. 32 (1930) S. 516 ff. (zit. als P.G.).
5. Hausdorff: Grundzüge der Mengenlehre. Berlin 1914 (1. Aufl.).
6. v. Kerékjarto: Topologie I. Berlin 1923.

Einleitung.

Der Hauptsatz der Topologie in drei Dimensionen spricht die Gleichwertigkeit von Homöomorphie[1]) und Elementarverwandtschaft[2]) für Mannigfaltigkeiten aus. Der Satz läßt sich folgendermaßen formulieren:

I. Elementarverwandte Zellmannigfaltigkeiten sind — als Punktmengen betrachtet[3]) — homöomorph.

II. Homöomorphe Punktmannigfaltigkeiten mit je einem kombinatorischen Schema sind — kombinatorisch gesehen — elementarverwandt.

Der Beweis von I bietet keine wesentlichen Schwierigkeiten und ist für jede Dimension durchführbar[4]). Der Satz II läßt sich offenbar reduzieren auf den Satz

II'. Zwei beliebige kombinatorische Schemata einer Punktmannigfaltigkeit besitzen immer eine gemeinsame Ableitung.

Der Beweis des Satzes II' zerfällt im wesentlichen in einen kombinatorischen und einen approximativen Teil. Während für

---

[1]) Homöomorphe Punktmannigfaltigkeiten sind topologisch, d. h. eineindeutig und umkehrbar stetig aufeinander abbildbar.

[2]) Zwei kombinatorische Gebilde sind elementarverwandt, wenn ein solches Gebilde existiert, welches durch el. U.[6]) sowohl aus dem ersten als auch aus dem zweiten hervorgeht (Existenz einer gemeinsamen Ableitung; Ableitung = Ergebnis einer endlichen Reihe von el. U.); s. a. Tietze, Monatsh. f. Math. u. Phys. 19.

[3]) D. h. jeder i-Zelle wird eine i-dimensionale einfach zusammenhängende Punktmenge zugeordnet.

[4]) Siehe Furch, Zur Grundlegung der kombinatorischen Topologie (zit. als Furch I). Hamburger Abhandl. III (1924) S. 71.

den ersten Teil (Konstruktion einer gemeinsamen Ableitung; kombinatorischer Hauptsatz der dreidimensionalen Topologie[5]) die Operation der el. U.[6]) hinreicht, kommen für den zweiten Teil punktmengentheoretische Konstruktionen in Betracht, von denen die M_g-Approximation und die gleichmäßige Approximation (s. § 4) die wichtigsten sind. Hauptsächlichstes Hilfsmittel für die Durchführung dieser Konstruktionen ist die Einführung einer sogen. Zellmetrik für ein kombinatorisches Schema (s. § 2).

Das Dehnsche Lemma wird als richtig unterstellt. Es ist nur nötig, es unter der speziellen Annahme, daß der Grundraum ein Elementarraum ist, zugrundezulegen.

Die Behandlung des Problemes in der hier durchgeführten Art wurde von mir auf Anregung von Herrn Prof. Furch unternommen. Ich möchte nicht versäumen, auch an dieser Stelle Herrn Prof. Furch für seine stets liebenswürdige Hilfsbereitschaft und seine mannigfachen wertvollen Ratschläge meinen Dank auszusprechen.

---

[5]) Siehe Furch I S. 73 ff. und Furch, Zur kombinatorischen Topologie des dreidimensionalen Raumes (zit. als Furch II). Hamburger Abhandl. III (1924) S. 237 ff.

[6]) El. U. = elementare Unterteilung; reg. U. = reguläre Unterteilung.

1. Kapitel.

Einführende Hilfsmittel.

§ 1.

Die dreidimensionale Mannigfaltigkeit.

Die dreidimensionale kombinatorische Topologie baut ihre Komplexe aus 3-Zellen (dreidimensionalen Zellen) und deren Randzellen auf [7]). Unter einer i-Zelle soll eine einfach zusammenhängende i-dimensionale Punktmenge verstanden werden. Ein zusammenhängender [8]) dreidimensionaler Komplex heißt eine dreidimensionale (kombinatorische) Zellmannigfaltigkeit, wenn 1. der Komplex höchstens abzählbar viele 3-Zellen enthält, 2. der Rand des Sterns [9]) jeder 0-Zelle eine zweidimensionale Sphäre ist. Jede 0-Zelle ist entweder

---

[7]) Eine Menge $\{\mathfrak{E}^0, \mathfrak{E}^1, \mathfrak{E}^2, \mathfrak{E}^3\}$ heiße ein Komplex $\mathfrak{K}^3$, wenn 1. mit jeder i-Zelle $\mathfrak{E}^i (i = 0, 1, 2, 3)$ auch deren Randzellen zu $\mathfrak{K}^3$ gehören, 2. je zwei Zellen verschiedener Dimension punktfremd sind, 3. je 2 i-Zellen $\mathfrak{E}^i_k$ und $\mathfrak{E}^i_l (k \neq l)$ entweder fremd sind oder genau eine und nur eine i^*-Zelle ($i^* < i$) und deren Randzellen und sonst nichts gemein haben, 4. jede 0-Zelle gemeinsame Randzelle von nur endlich vielen 3-Zellen ist und 5. jede i-Zelle ($i < 3$) Randzelle mindestens einer 3-Zelle ist.

[8]) Ein Komplex heißt zusammenhängend, wenn jede 0-Zelle mit jeder anderen 0-Zelle durch einen ganz dem Komplex angehörenden 1-Zellenzug verbindbar ist.

[9]) Der Stern einer i-Zelle ($0 \leq i \leq 2$) ist die Gesamtheit aller 3-Zellen, welche die i-Zelle als (gemeinsame) Randzelle besitzen. Die i-Zelle heißt die „mittlere Zelle“ (bzw. „Mittelpunkt“) des Sternes. „Innere Zellen“ des Sterns sind alle diejenigen Zellen beliebiger Dimension, welche die mittlere Zelle als Randzelle besitzen oder mit der mittleren Zelle eine Randzelle gemein haben (oder selbst Randzelle der mittleren Zelle sind). Zellen, welche nicht mit der mittleren Zelle des Sterns inzident sind, heißen Randzellen des Sterns.

a′) innere Zelle oder b′) Randzelle.

Im letzteren Falle ist sie Element des sphärischen Sternrandes. Dementsprechend unterscheidet man homogene und berandete Zellmannigfaltigkeiten. Die homogenen Zellmannigfaltigkeiten heißen geschlossen, wenn sie nur endlich viele, offen, wenn sie (abzählbar) unendlich viele 3-Zellen enthalten.

Die allgemeine Topologie definiert eine dreidimensionale Punktmannigfaltigkeit durch einen zusammenhängenden topologischen Raum [10]) mit den Eigenschaften, daß 1. das zweite Hausdorffsche Abzählbarkeitsaxiom [11]) erfüllt ist, 2. jede Umgebung U_P eines Punktes P des topologischen Raumes sich topologisch auf die speziellen Punktmengen

a) $x^2 + y^2 + z^2 < 1$ oder b) $x^2 + y^2 + z^2 < 1\,;\ z \geq 0$

abbilden läßt, wenn P dem Tripel $x = y = z = 0$ zugeordnet wird und 3. der topologische Raum als Komplex darstellbar [7]) (z. B. triangulierbar) ist. Es sei gleich bemerkt, daß wir auf S. 5 einen Zusatz zu 2 machen werden. Existieren nur solche Punkte P mit Umgebungen der Art a), so heißt die dreidimensionale Punktmannigfaltigkeit homogen, und zwar geschlossen, wenn schon ein endliches System von definierenden Umgebungen den topologischen Raum überdeckt, offen, wenn abzählbar unendlich viele Umgebungen nötig sind. Die Punktmannigfaltigkeit heißt berandet, wenn auch Punkte mit einem Umgebungscharakter der Art b) existieren. Solche Punkte heißen Randpunkte der Punktmannigfaltigkeit.

Es erhebt sich die Frage, ob jede Punktmannigfaltigkeit durch geeignete Zerlegung in eine Zellmannigfaltigkeit übergeführt werden kann, und ob eine Zellmannigfaltigkeit zugleich auch eine Punktmannigfaltigkeit im Sinne der obigen Definition ist.

Eine dreidimensionale Punktmannigfaltigkeit werde in El.R. Ste.[12]), die einschließlich ihrer Ränder elementar sind [13]), zerlegt.

[10]) Siehe Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig 1914 (1. Aufl.) S. 213.

[11]) Siehe l. c. 8 S. 263.

[12]) El.R. (Fl.L.) St. = Elementar-Raum (-Flächen, -Linien) - Stück.

Die Zerschneidung werde derart eingerichtet, daß das entstehende kombinatorische Schema ein zusammenhängender dreidimensionaler Komplex wird (s. Fußnote 7 u. 8). Sein Charakter als Zellmannigfaltigkeit ergibt sich — wie sich leicht zeigen lassen würde — daraus, daß die Ränder der Sterne seiner 0-Zellen zweidimensionale Sphären sind. Wir werden diesen Satz nicht beweisen, sondern ihn als zusätzliche Forderung zu 2 (s. S. 4) hinzunehmen. Dagegen ist die dreidimensionale Zellmannigfaltigkeit stets eine Punktmannigfaltigkeit. Es gilt nämlich, daß, wenn der Stern jeder 0-Zelle elementar ist, dann auch die Sterne der 1- und 2-Zellen Elementargebilde sind. Es läßt sich also — auf welcher Zelle der Punkt sich auch befinden mag — zu jedem Punkte der Punktmenge eine einfach-zusammenhängende dreidimensionale Umgebung der Art a) angeben.

Unter Zugrundelegung der zusätzlichen Forderung werden wir künftig schlechtweg von dreidimensionalen Punktmannigfaltigkeiten sprechen. Dennoch soll die Unterscheidung in Punkt- und Zellmannigfaltigkeit beibehalten werden, und zwar wird die eine oder die andere Benennung benutzt, je nachdem mehr der allgemein topologische oder der kombinatorische Charakter der zugrunde liegenden Mannigfaltigkeit im Vordergrunde steht.

§ 2.

Die Zellmetrik eines kombinatorischen Schemas[14]).

Dieser Paragraph bringt den für den Hauptsatz der Topologie in drei Dimensionen wichtigen Begriff der Zellmetrik eines kombinatorischen Schemas. Die Metrik eines kombinatorischen Schemas wird durch die folgenden beiden Hilfssätze erklärt[15]):

---

[13]) Was zur Folge hat, daß keine Selbstberührungen der Zellen auftreten.

[14]) Siehe Furch, Schnitt zweier Sphären im R_3 (zit. als S.S.), Math. Ztschr. 28 (1928) S. 556, und Furch, Polyedrale Gebilde verschiedener Metrik (zit. als P.G.), Math. Ztschr. 32 (1931) S. 512.

[15]) Siehe Furch I S. 70/71.

1. Hilfssatz: Gegeben zwei Simplexe[16]) gleicher, aber sonst beliebiger Dimension mit einer topologischen Abbildung f der Randsphären, welche die Randzellen einzeln ineinander überführt. Die Abbildung f läßt sich stetig ins Innere der Simplexe fortsetzen.
2. Hilfssatz: Die topologische Abbildung f ist nur für einige der Randzellen erklärt. Sie läßt sich stetig auf die übrigen Randzellen fortsetzen[17]).

Es sei eine dreidimensionale geschlossene Mannigfaltigkeit mit einem Simplexschema vorgelegt. Die Simplexe mögen mit $\mathfrak{S}^0, \mathfrak{S}^1, \mathfrak{S}^2, \mathfrak{S}^3$ bezeichnet werden. Jedes Simplex $\mathfrak{S}^i$ ist mittlere Zelle eines Simplexsterns $^*\mathfrak{S}^{(i)}$ $(i = 3, 2, 1, 0)$ $[^*\mathfrak{S}^{(3)} = \mathfrak{S}^3]$. Bevor die Zellmetrik eines solchen simplizialen Schemas erklärt wird, mögen die zu leistenden metrischen Konstruktionen aufgezählt und klassifiziert werden. Die Konstruktionen lassen sich in zwei Gruppen einteilen: eine erste, die rein metrischen oder linearen Konstruktionen, und eine zweite, die mit Hilfe dieser ersten Operationen möglichen Konstruktionen kombinatorischen Charakters. Zu den linearen Konstruktionen gehören die folgenden beiden Fundamentalaufgaben: 1. zwei gegebene Punkte durch einen Streckenzug zu verbinden, und 2. in ein aus drei derartigen Streckenzügen bestehendes Polygon eine verallgemeinerte Dreiecksfläche einzuspannen, d. h. eine solche, die aus mehreren ebenflächigen, geradlinig polygonal berandeten Flächenstücken zusammengesetzt ist. Eine Anwendung dieser Fundamentalkonstruktionen ist die M_g-Approximation einer M_l-Sphäre (s. S. 14). Wenn diese Grundaufgaben gelöst sind, lassen sich die metrisch-kombinatorischen Operationen der Gesamt- und Teilablösung (s. S. 11 u. 12) und der Angleichung (s. S. 13) auf rein kombinatorischem Wege durchführen.

---

[16]) Jedes Schema, welches mit dem des $(n+1)$-Zells des euklidischen R_n identisch ist, heißt ein (n-dimensionales) Simplex.

[17]) Wofern nur die vorgelegte Abbildung der i-Zellen stetig an die der $(i+1)$-Zellen anschließt.

Für die Lösung der Grundaufgaben wird in bezug auf die Lage der gegebenen Elemente folgende Bedingung gefordert: Die Elemente eines zu konstruierenden linearen Gebildes (Streckenzug, verallgemeinerte Dreiecksfläche) liegen mindestens innerhalb eines einzigen Punktsterns $*\mathfrak{S}^{(0)}$ (sie können jedoch auch in kleineren Bezirken liegen). Je nachdem die Elemente in einem 3-, 2-, 1- oder 0-Stern liegen, werden für die Konstruktion des Gebildes vier verschiedene Operationen $O^{(3)}$, $O^{(2)}$, $O^{(1)}$ und $O^{(0)}$ erklärt. Diese vier Operationen sind richtungsbestimmend für die Einführung der Zellmetrik in ein kombinatorisches Schema.

I. Simplexmetrik.

Nach Annahme sind die Simplexe $\mathfrak{S}^3$ homöomorph zu den inneren Punkten eines euklidischen Tetraeders Δ^3 mit den ebenflächigen und geradlinigen Randzellen Δ^2, Δ^1, Δ^0. Ein solches Vergleichstetraeder oder Urtetraeder sei fest vorgelegt. Es folgt: es gibt eine die Randzellen ineinander überführende topologische Abbildung — sie heiße g — zwischen einem beliebigen Simplex $\mathfrak{S}^3$ der Mannigfaltigkeit und dem Vergleichstetraeder Δ^3. — Durch diese topologische Abbildung g werden die Begriffe „eben“ und „gerade“ von dem Vergleichstetraeder Δ^3 auf das Simplex $\mathfrak{S}^3$ übertragen. Insbesondere erscheinen die Randzellen $\mathfrak{S}^i$ $(i = 0, 1, 2)$ im Sinne dieser Abbildung eben und gerade und das Simplex $\mathfrak{S}^3$ konvex. Vermöge g sind im Simplex und auf seinem Rande die beschriebenen linearen Konstruktionen, und zwar eindeutig durchführbar. Wir sagen: vermöge g ist in dem Simplex und auf seinem Rande eine Metrik erklärt. Die Ausführung der angegebenen Konstruktionen in größeren Bezirken soll jetzt durchgeführt werden.

Zunächst ist ersichtlich, wie durch sukzessive Fortsetzung eine Zellmetrik einer Mannigfaltigkeit erklärt werden kann. In dem Vergleichstetraeder Δ^3 werden baryzentrische Koordinaten eingeführt. Vermöge einer topologischen Abbildung g seien dann solche auch in einem ersten Simplex der Mannigfaltigkeit erklärt. Hierdurch sind ohne weiteres bestimmte Randzellen der benach-

barten Simplexe mit baryzentrischen Koordinaten versehen worden. Bei der Erklärung der Metrik in einem solchen angrenzenden, am Rande teilweise schon metrisierten Simplex wird zunächst eine topologische Teilabbildung zwischen dem Rande des Simplex und dem des Vergleichstetraeders dadurch erklärt, daß die Punkte der metrisierten Randzellen solchen Punkten entsprechender Randzellen von Δ^3 zugeordnet werden, die gleiche baryzentrische Koordinaten tragen. Mittelst der beiden Hilfssätze ist diese Teilabbildung über das ganze Simplex fortsetzbar. Durch Wiederholung läßt sich somit die Metrik in allen Zellen der Mannigfaltigkeit erklären. Durch eine solche Zellmetrik sind jedem Simplex derart baryzentrische Koordinaten zugeordnet, daß diese in den gemeinsamen Randzellen benachbarter Simplexe übereinstimmen.

Lineare Konstruktionen zwischen Punkten desselben Simplex sind in diesem eindeutig durchführbar. Bei Aneinanderreihung mehrerer solcher Konstruktionen oder bei Konstruktionen über größere Bezirke reicht die von Simplex zu Simplex sich ändernde Simplexmetrik nicht aus. Wir werden neben den eindeutigen Konstruktionen im Simplex — denen die Operation $O^{(3)}$ entspricht — auch solche für die Simplexsterne ${}^*\mathfrak{S}^{(2)}$, ${}^*\mathfrak{S}^{(1)}$ und ${}^*\mathfrak{S}^{(0)}$ — entsprechend den Operationen $O^{(2)}$, $O^{(1)}$ und $O^{(0)}$ — erklären. Hierbei kann es vorkommen, daß ein Gebilde einer Operation von dem Operationsbereich einer Operation höherer Klasse (also kleineren Index) aus gesehen nicht mehr eindeutig geradlinig und ebenflächig ist, sondern nur noch gebrochen linear. Solche linear gebrochenen Gebilde mögen auch polyedrale Gebilde genannt werden; die einzelnen, die polyedralen Gebilde konstituierenden Stücke mögen total-gerade bzw. total-eben heißen, insbesondere wollen wir die total-ebenen Stücke „Facetten“ nennen. Diese Stücke liegen notwendig innerhalb eines einzigen Simplex.

II. Sternmetrik.

Unter Sternmetrik soll eine solche Metrik verstanden werden, die innerhalb eines Sternes eindeutige lineare Konstruktionen liefert.

Jeder Simplexstern $*\mathfrak{S}^{(i)}$ mit der mittleren Zelle $\mathfrak{S}^i$ ist definitionsgemäß ein Elementargebilde, dessen Berandung ein K-Polyeder im Sinne von Steinitz[18]) ist. Für diese gilt der

K-Polyedersatz[19]): jedes K-Polyeder ist im euklidischen Raum geradlinig, ebenflächig und konvex realisierbar.

Unter Benutzung einer derartigen Realisierbarkeit für den Rand eines Sterns $*\mathfrak{S}^{(i)}$ läßt sich eine geradlinig-ebenflächige und konvexe Realisierung $*\Delta^{(i)}$ des Sterns $*\mathfrak{S}^{(i)}$ konstruieren. In den einzelnen, den Simplexen $\mathfrak{S}^3$ von $*\mathfrak{S}^{(i)}$ entsprechenden Tetraedern von $*\Delta^{(i)}$ werden baryzentrische Koordinaten eingeführt. Da auch in den Simplexen $\mathfrak{S}^3$ des Sterns $*\mathfrak{S}^{(i)}$ durch die Simplexmetrik baryzentrische Koordinaten erklärt sind, so läßt sich zwischen dem Simplexstern $*\mathfrak{S}^{(i)}$ und seiner Realisierung $*\Delta^{(i)}$ eine topologische Abbildung — sie heiße g^* — dadurch erklären, daß solche Punkte einander zugeordnet werden, die in entsprechenden Zellen von $*\mathfrak{S}^{(i)}$ bzw. $*\Delta^{(i)}$ liegen und auf ihnen die gleichen baryzentrischen Koordinaten haben. Vermöge g^* werden die Begriffe „eben" und „gerade" aus der Realisierung $*\Delta^{(i)}$ auf den Simplexstern $*\mathfrak{S}^{(i)}$ übertragen, und zwar so, daß auch die einzelnen Simplexe des Simplexsterns geradlinig, ebenflächig und konvex erscheinen. Aus der Konvexität der Realisierung $*\Delta^{(i)}$ folgt, daß die oben bezeichneten Konstruktionen nunmehr im ganzen Simplexstern $*\mathfrak{S}^{(i)}$ eindeutig durchführbar sind. — Die somit beseitigte Unbequemlichkeit der Mehrdeutigkeit linearer Konstruktionen in der Simplexmetrik tritt in der Sternmetrik wieder auf, wenn sich die Konstruktionen über mehrere (benachbarte) Simplexsterne erstreckt. Die in solchen Fällen auftretende Mehrdeutigkeit der Konstruktionen läßt aber jetzt unter systematischer Verwendung der Operationen $O^{(3)}$, $O^{(2)}O$, $^{(1)}$ und $O^{(0)}$ in der angegebenen Reihenfolge vermeiden.

Die Einführung der vier Operationen rechtfertigt sich dadurch, daß die im Durchschnitt zweier benachbarter Operationsbereiche von Operationen derselben Klasse konstruierten

[18]) Siehe Enzykl. d. math. Wiss. III A-B 12 (31) S. 71.

[19]) l. c. 21 (34) S. 77.

Gebilde auch zu beiden Operationsbereichen wirklich gehören, denn jeder solcher Durchschnitt kann aufgefaßt werden als ein Operationsbereich einer Operation einer vorhergehenden Klasse. Es stehen somit der Durchführung der Fundamentalkonstruktionen keine prinzipiellen Schwierigkeiten im Wege. Es ist allerdings zu beachten, daß bei diesen Konstruktionen noch Singularitäten auftreten können, welche aber mit Hilfe des Dehnschen Lemmas (auf welches hier nicht näher eingegangen werden soll) (s. S. 18) beseitigt werden können. Das Dehnsche Lemma läßt sich mit Hilfe der Ablösung — die zusammen mit der Angleichung an sich noch Verwendung findet — durchführen.

In den späteren Ausführungen werden entsprechend zweier verschiedener Zellteilungen derselben Grundmannigfaltigkeit nebeneinander zwei verschiedene Zellmetriken, die mit M_l zw. M_g bezeichnet werden, Verwendung finden. Gebilde, welche im Sinne der Metrik M_l bzw. M_g polyedral sind, werden mit (großen oder kleinen) lateinischen bzw. griechischen Buchstaben bezeichnet. E^i, A^i, S^i bzw. E^i, A^i, Σ^i sind also i-dimensionale offene Zellen, abgeschlossene Zellen, Sphären, welche im Sinne der Metrik M_l bzw. M_g polyedral sind. Ohne Angabe einer besonderen Metrik werden die deutschen Buchstaben $\mathfrak{E}^i$, $\mathfrak{A}^i$, $\mathfrak{S}^i$ benutzt. — Der polyedrale Charakter einer M_l-Mannigfaltigkeit mit dem Schema M^3 (E^0, E^1, E^2, E^3) tut sich dadurch kund, daß die 3-Zellen E^3 der Mannigfaltigkeit im Sinne der Metrik M_l polyedral berandet sind, oder mit anderen Worten: den polyedralen Charakter einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit M^3 erkennt man aus dem polyedralen Charakter des zu M^3 gehörigen Zellgerüstes Z^2 [20]).

III. Metrische Operationen.

Anschließend mögen einige Konstruktionen besprochen werden, die ihre Möglichkeit dem Begriff der Metrik verdanken.

---

[20]) Das Zellgerüst Z^2 einer Zellmannigfaltigkeit M^3 ist der zweidimensionale Komplex aller 0-, 1- und 2-Zellen von M^3 unter Erhaltung ihrer Inzidenzen.

III, 1. Unter der Gesamtablösung einer M_l-polyedralen Sphäre S^2 nach der einen oder andern Seite,[21]) ist folgende Konstruktion (bisweilen auch das Ergebnis S'^2 der Konstruktion) zu verstehen. Im Inneren (Äußeren) einer gegebenen M_l-polyedralen Sphäre S^2 werde eine M_l-polyedrale Sphäre konstruiert, deren Facetten sich zu einem solchen Schema zusammenfassen lassen, welches mit dem der Sphäre S^2 identisch ist. — Die Konstruktion der Sphäre S'^2 wird mittels reg. U.[6]) durchgeführt. Zunächst werden die Facetten der Sphäre S^2 regulär unterteilt, so daß sie nur von zweidimensionalen Simplexen gebildet werden. Sodann wird eine Reihe von reg. U. des von S^2 berandeten El.R.St.s E^3 durchgeführt, derart, daß schließlich alle Simplexfacetten von S^2 Randzellen genau eines dreidimensionalen Simplex des El.R.St.s sind, und daß zwei 3-Simplexe von E^3, welche paarweise fremde 2-Simplexe von S^2 als Randzellen besitzen, auch paarweise fremd sind. Alle reg. U. werden im Sinne der Metrik M_l polyedral durchgeführt. Aus dem El.R.St. E^3 werden alle diejenigen Simplexe fortgenommen, welche fremd sind zu der Sphäre S^2. Der Restraum ist eine sphärische Schale[22]). In der Tat: sein Rand setzt sich zusammen 1. aus der Sphäre S^2, und 2. aus denjenigen Randzellen der Restsimplexe, die zu den 2-Simplexen von S^2 fremd sind. Jeder Simplexfacette von S^2 wird ein Eckpunkt des anderen Randes zugeordnet, nämlich die freie Ecke des auf der betrachteten Simplexfacette aufsitzenden 3-Simplex des Restraumes. Ebenso läßt sich jeder Kante von S^2 eine (allerdings noch elementar unterteilte) Kante des anderen Randes zuordnen durch die freien Kanten aller derjenigen 3-Simplexe, die die betrachtete Kante von S^2 gemein haben, und schließlich läßt sich zu jedem Eckpunkt von S^2 eine

---

[21]) Siehe S.S. S. 564. Dort wurde ein Weg vorgeschlagen, S'^2 mittels Facetten zu konstruieren, welche im Sinne der Metrik parallel zu den Facetten der Sphäre S^2 laufen. (Die Gesamtablösung eines Gebildes bedeutet anschaulich eine Art Parallelführung.)

[22]) Eine sphärische Schale bzw. ein Raumring bzw. ein Ringstreifen sind das topologische Bild der Punktmengen $\{1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 2\}$ bzw. $\{1 \leq x^2+y^2 \leq 2;\ z^2 \leq 1\}$ bzw. $\{1 < x^2+y^2 \leq 2;\ z=0\}$.

Fläche finden als die Gesamtheit der freien zweidimensionalen Randzellen aller diese Ecke gemein habenden 3-Simplexe. Der andere Rand des Restraumes erweist sich so kombinatorisch als Dualkomplex von S^2, d. h. er ist selbst wieder eine 2-Sphäre S'^2. Die Sphäre S'^2 sprechen wir als die Gesamtablösung der Sphäre S^2 in ihr Inneres an. Durch genügend weit getriebene reguläre U. läßt sich erreichen, daß die abgelöste Sphäre S'^2 beliebig nahe bei der Ausgangssphäre verbleibt.

III, 2. Als Teilablösung[23]) wird folgendes erklärt: Zwei singularitätenfreie, orientierbare ein- oder zweidimensionale Gebilde B_1 und B_2 mögen ein gemeinsames Stück[24]) B_0[25]) besitzen, so daß in einer gewissen Umgebung von B_0 höchstens auf einer Seite von B_2 weitere B_1-Punkte liegen. B_1 und B_2 berühren sich also längs B_0. Wird B_1 unter Wahrung seines polyedralen und topologischen Charakters in einer vorgegebenen Umgebung von B_0 so abgeändert, daß es keine B_0-Punkte mehr mit B_2 gemein hat, so heißt auch diese Operation Ablösung des Gebildes B_1 von B_2. Die entsprechende Operation wird auch unter Festhalten des B_0-Randes ausgeführt. — Die vorgegebene Umgebung $U(B_0)$ des gemeinsamen Stücks B_0 der Gebilde B_1 und B_2 sei so beschaffen, daß innerhalb $U(B_0)$ B_1 und B_2 keine anderen Punkte als B_0-Punkte gemeinsam haben. Das Elementarraumstück $U(B_0)$ wird im Sinne der vorgelegten (M_l) Metrik regulär unterteilt, und zwar derart, daß schließlich alle Facetten und Kanten von B_1 und B_2 in dem Schema von $U(B_0)$ auftreten, nachdem diese zunächst schon regulär unterteilt waren. Nunmehr werden alle diejenigen Simplexe fortgenommen, welche Punkte mit B_0 gemein haben und auf der zu B_2 fremden Seite von B_1 liegen. Die freien Randzellen der fortgenommenen Simplexe, das sind diejenigen Randzellen, welche keine B_0-Punkte enthalten, bilden zusammen einen Dualkomplex B_0 zu dem Simplexschema von B_0. Alle auf

[23]) Siehe P.G. II, 3 S. 517.

[24]) Zum Begriff des „Stücks“ gehöre, daß es kein umfassenderes, das Stück enthaltendes, zusammenhängendes Gebiet von sonst gleicher Art gibt.

[25]) Ist B_0 zweidimensional, so ist es polyedral berandet.

B_1 liegenden 1- oder 2-Simplexe, welche mit B_0 Punkte gemein haben, erklären ebenfalls ein zu B_0 elementarverwandtes Gebilde B_0^*. Die Ersetzung von B_0^* durch $\overline{B}_0$ führt zu einem mit B_1 elementarverwandten Gebilde $\overline{B}_1$, welches als die Ablösung des Gebildes B_1 von B_2 angesprochen werden kann. Bei der Ablösung des Gebildes B_1 von B_2 unter Festhalten des B_0-Randes findet noch ein gewisser Ringstreifen Verwendung: die Simplexe von $U(B_0)$ werden nochmals regulär unterteilt. Sodann werden aus dem von B_0^* und $\overline{B}_0$ berandeten Raumstück alle diejenigen Simplexe der zweiten reg. U. fortgenommen, die Punkte gemein haben mit dem Ringstreifen $(B_0^*—B_0)$. (Der Rand von B_0 soll nicht zu diesem Ringstreifen zählen; halboffener Ringstreifen.) Die freien Randzellen dieser Simplexe erklären dann einen Ringstreifen der gesuchten Art.

III, 3. Angleichung[26]). Die zweidimensionalen M_l-Gebilde G_1^2 und G_2^2 mögen sich schneiden, ohne daß ihre Berandung an der Durchdringung teilnimmt. Die Angleichung von G_1^2 an G_2^2 führe zu einem abgeänderten Gebilde $G_1'^2$, welches denselben polyedralen und topologischen Charakter besitzt wie G_1^2 und innerhalb einer zu allen Rändern fremden vorgegebenen Umgebung von G_2^2 verbleibt, derart, daß die Durchdringungen verschwinden. Wesentlich ist, daß G_2^2 ungeändert bleibt. Die Operation ist offenbar nicht immer durchführbar. Wenn sie durchführbar ist, wird sie in der Weise bewerkstelligt, daß gewisse Teile von G_1^2 (nämlich diejenigen, welche die Durchsetzung von G_1^2 und G_2^2 verursachen) ersetzt werden durch topologisch gleichwertige Teile von G_2^2 (mit gleichem Rand). Die auf diese Weise zustande kommende Berührung von G_2^2 mit dem so abgeänderten G_1^2 wird durch Ablösung beseitigt. — Gelegentlich wird auch die Möglichkeit ins Auge gefaßt, daß der Rand der anzugleichenden Fläche G_1^2 ganz oder teilweise auf G_2^2 oder dem Rand von G_2^2 liegt. Eine Zusammenstellung und Besprechung der einfachsten Fälle möglicher Angleichung finden sich in P.G. III, 5.1—5.4.

---

[26]) Siehe P.G. II, 5 S. 519.

III, 4. M_g-Approximation[27]). In einem Operationsbereich, in welchem die beiden Metriken M_l bzw. M_g erklärt sind, liege eine M_l-Sphäre S^2. Es ist S^2 in ein M_g-polyedrales (eindeutig-stetiges) Bild von S^2 überzuführen. S^2 wird trianguliert, d. h. auf S^2 wird durch Einführung von gewissen 0-Zellen ein Simplexschema erklärt. Diese Triangulierung wird so fein ausgeführt, daß die Eckpunkte eines jeden M_l-Dreiecks ganz im Innern eines die Zellmetrik M_g erklärenden 0-Sterns des Operationsbereichs liegen. Aus dieser Art der Triangulierung von S^2 folgt, daß die Eckpunkte zweier (längs einer Seite) benachbarter Dreiecke entweder alle in demselben 0-Stern oder aber die Eckpunkte der gemeinsamen Seite in dem Durchschnitt (1-Stern) zweier benachbarter 0-Sterne der Zellmetrik M_g liegen. Zunächst wird zwischen den Punkten mit Hilfe der vier Operationen $O^{(3)}$, $O^{(2)}$ $O^{(1)}$ und $O^{(0)}$ ein M_g-polyedrales Streckengerüst konstruiert. Auf diese Weise wird jedem Rande der ursprünglichen Dreiecksfläche eine (im allgemeinen verknotete) 1-Sphäre zugeordnet, die aber in bezug auf die Sterne dieselbe Lage hat wie die ursprüngliche Dreiecksfläche. In jede dieser 1-Sphären läßt sich (da sie ganz im Inneren eines 0-Sternes liegt) eine (im allgemeinen singuläre) M_g-polyedrale Dreiecksfläche einspannen. Die Gesamtheit aller (sich noch gegenseitig durchdringender) M_g-Dreiecke konstituiert eine singuläre M_g-Sphäre.

§ 3.

Kombinatorische Umgebungen[28]).

Für die i-Zellen E^i $(i = 0, 1, 2, 3)$ dreidimensionaler kombinatorischer Gebilde werden zweckmäßig Umgebungen erklärt, welche im Gegensatz zu den Umgebungen der Punktmengentheorie abgeschlossene Punktgebilde sind. Die vorgelegte dreidimensionale geschlossene Zellmannigfaltigkeit M^3 (E^0, E^1, E^2, E^3)

[27]) Siehe S.S. S. 556/57 und P.G. I, 6 S. 516.

[28]) Furch I S. 85 (dort wird die Bezeichnung „Plattenumgebung“ gebraucht).

sei im Sinne der Metrik M_l polyedral. — Die nachfolgenden Konstruktionen werden im Sinne dieser Metrik polyedral ausgeführt.

Jeder i-Zelle E^i $(i = 0, 1, 2, 3)$ werde eine dreidimensionale, M_l-polyedrale Elementarmannigfaltigkeit $Y(E^i)$, die Umgebung der Zelle E^i, zugeordnet. Das System der Umgebungen $Y(E^i)$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ genüge den Bedingungen[29]: 1. $Y(E^i)$ enthält die Zelle E^i ganz in ihrem Inneren, 2. die Umgebungen je zweier Zellen haben die Umgebungen der gemeinsamen — echten oder unechten[30] — Randzellen und sonst nichts gemein, 3. die Fortnahme der Umgebungen aller Randzellen einer Zelle E^i aus der Umgebung $Y(E^i)$ läßt ein Gebilde übrig, dessen abgeschlossene Hülle elementar ist. — Die abgeschlossene Hülle wird die Rumpfumgebung $Y^*(E^i)$ der Zelle E^i genannt. Das System der Rumpfumgebungen $Y^*(E^i)$ genüge den weiteren Bedingungen[31], 4. $Y^*(E^0) = Y(E^0)$ für alle E^0, 5. $Y^*(E_k^i)$ und $Y^*(E_l^i)$ sind für gleiches i und $k \neq l$ — auch in den Rändern — fremd. Von den so definierten Umgebungen $Y(E^i)$ wird man noch fordern, daß 6. E^i von allen Punkten der Umgebung $Y(E^i)$ eine Entfernung kleiner als jede beliebige Größe ε haben soll.

Allen diesen Forderungen wird man gerecht durch eine rein kombinatorische Definition. Das System von Umgebungen $Y(E^i)$ bzw. $Y^*(E^i)$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ soll also kombinatorisch mittels der Operation der reg. U. aus der vorgelegten Zellmannigfaltigkeit $M^3(E^0, \cdots, E^3)$ gewonnen werden. Das System der Umgebungen kann aufgefaßt werden als dasjenige der 3-Zellen des Dualkomplexes der ersten reg. U. von $M^3(E^0, \cdots, E^3)$. Die letzte, ε-Forderung, würde freilich verlangen, daß eine genügende Anzahl von reg. U.en die Größe aller Teilzellen unter ε heruntergesetzt habe, so daß E^i alsdann als zusammengesetztes Gebilde erscheint, auf welches jedoch alles Folgende sinngemäß anwendbar bleibt.

Die Zellmannigfaltigkeit $M^3(E^0, \cdots, E^3)$ werde unter Einführung neuer 0-Zellen $P^{(i)}$ — je eine auf jeder Zelle E^i $(P^{(0)} = E^0)$ —

[29] Siehe P.G. I, 4 S. 514.

[30] Unechte Randzelle einer Zelle ist die Zelle selbst.

[31] Siehe P.G. I, 5 S. 516.

regulär unterteilt. Es entsteht eine simpliziale Mannigfaltigkeit $M_s{}^3$ mit den Simplexen s^3. Jedes Simplex s^3 trägt auf seinem Rande je eine 0-Zelle $P^{(i)}\,(i=0,1,2,3)$. Aus der Konstruktion der reg. U. folgt: 1. der Simplexstern $*s^{(0)}$ einer 0-Zelle $P^{(i)}$ enthält — auf seinem Rande — nur noch 0-Zellen der Art $P^{(k)}\,(k \neq i)$. 2. Zwei Simplexsterne $*s_k{}^{(0)}\,(k=1,2)$ um die verschiedenen 0-Zellen $P_k{}^{(i)}$ (bei gleichem i) sind entweder fremd oder haben einen höchstens zweidimensionalen Durchschnitt. — Die simpliziale Zellmannigfaltigkeit $M_s{}^3$ möge mittels neuer 0-Zellen $\overline{P^{(i)}}$ (s. Fig. 1) auf den Simplexen $s^i\,(i=0,1,2,3)$ $(\overline{P^{(0)}}=P^{(k)}\,(k=0,1,2,3))$ nochmals regulär unterteilt werden. Wieder gilt für die Simplexe $\overline{s^3}$ der neuen simplizialen Zellmannigfaltigkeit $M\frac{3}{s}$: jedes $\overline{s^3}$ trägt auf seinem Rande je eine 0-Zelle $\overline{P^{(i)}}\,(i=0,1,2,3)$, wobei eine der 0-Zellen $\overline{P^{(i)}}$ — nämlich $\overline{P^{(0)}}$ — gleich einer der 0-Zellen $P^{(k)}\,(k=0,1,2,3)$ ist. Aus beiden reg. U.en folgt: 3. der Simplexstern $*\overline{s^{(0)}}$ mit dem Mittelpunkt $\overline{P^{(0)}}\,(=P^{(k)})$ enthält auf seinem Rande nur noch 0-Zellen $\overline{P^{(i)}}$, welche ungleich $P^{(k)}$ sind. 4. Zwei Simplexsterne $*\overline{s_k{}^{(0)}}\,(k=1,2)$ mit den verschiedenen Mittelpunkten $P_k{}^{(i)}$ (gleiches i für $k=1,2$) sind — auch in den Rändern — fremd.

Ein Dualkomplex D^3 zur Zellmannigfaltigkeit $M_s{}^3$ ist durch folgende Festsetzung zu gewinnen: die Zellen $\overline{E^i}$ (das sind die die Simplexe s^{3-i} von $M_s{}^3$ ersetzenden Zellen des Dualkomplexes) sind die i-dimensionalen Simplexsterne mit den (auf den Simplexen s^{3-i} liegenden) Mittelpunkten $P^{(3-i)}\,(i=0,1,2,3)$; insbesondere sind also die $\overline{E^3}$ dreidimensionalen Simplexsterne mit den Mittelpunkten $\overline{P^{(0)}}$, d. h. $P^{(k)}\,(k=0,1,2,3)$. Das System der abgeschlossenen Zellen $\overline{E^3}$ des Dualkomplexes der ersten reg. U. der vorgelegten Zellmannigfaltigkeit besitzt schon die Eigenschaft eines Y^*-Rumpfumgebungssystems. — Die Identifizierung der Zellen $\overline{E^3}$ mit den gesuchten Rumpfumgebungen $Y^*\,(E^i)$ durch die Festsetzung, daß $E^3=Y^*\,(E^i)$ sein soll, wenn sowohl $\overline{E^3}$ als auch E^i den Punkt $P^{(i)}$ enthalten, und die in der vierten Folgerung enthaltene Eigenschaft der $\overline{E^3}$ läßt ohne weiteres erkennen, daß das konstruierte System $Y^*\,(E^i)$ allen Bedingungen genügt. Gleichzeitig sind aber auch die Forderungen für die

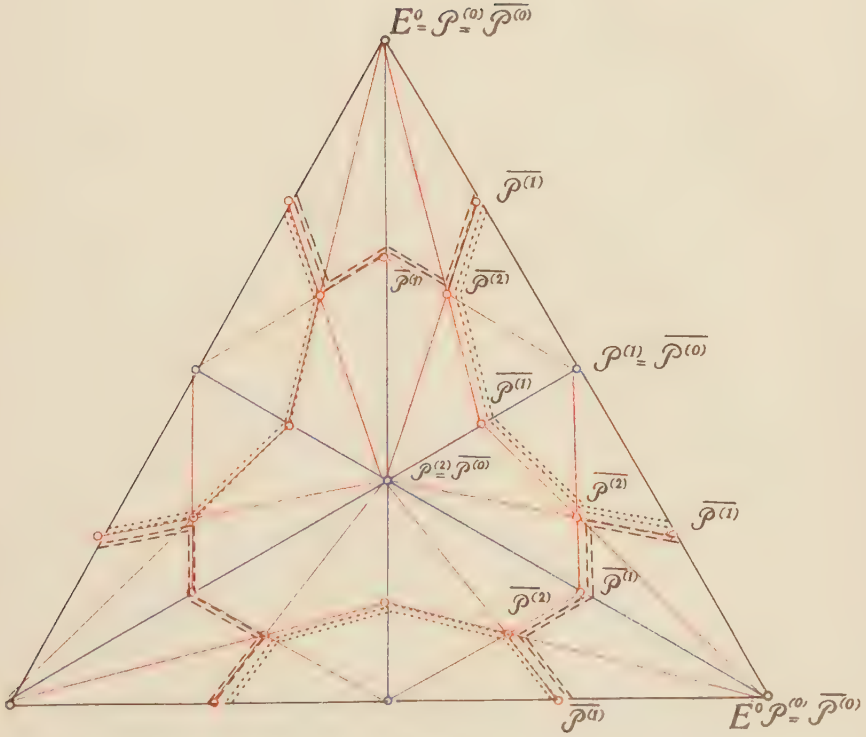

Fig. 1.

Die Figur zeigt die zweimalige reg U. eines Dreiecks (erste reg. U. blau; zweite reg. U. rot) und die Zusammenfassung zu den Y^*-Rumpfumgebungen [gestrichelt ⁼⁼⁼ $Y^*(E^0)$; punktiert ····· $Y^*(E^1)$].

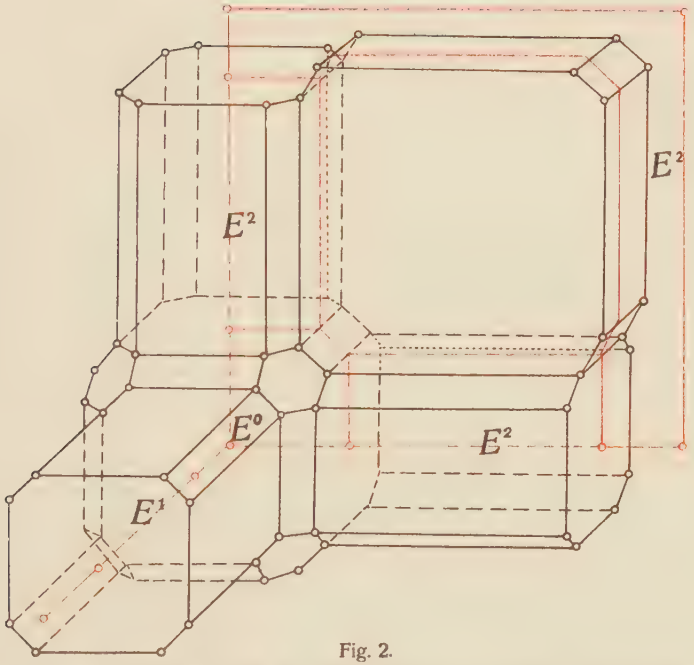

Fig. 2.

In einer 0-Zelle E^0 treffen sich drei 1-Zellen E^1; ferner ist eine 2-Zelle E^2 gezeichnet. — Es sind die zu diesen Zellen gehörigen Y^*-Umgebungen: $Y^*(E^0)$ [ein an den Kanten und Ecken beschnittener Würfel], $Y^*(E^1)$ [säulenförmig] und $Y^*(E^2)$ [plattenförmig] gezeichnet. (Aus Übersichtlichkeitsgründen ist angenommen, daß die 3-Zellen des Sterns um E^0 alle Würfel seien.) — Schließlich sind noch die Durchdringungen der gezeichneten Zellen mit den gezeichneten Rumpfumgebungen angegeben.

Y-Umgebungen erfüllt; insbesondere enthält jede Umgebung $Y(E^i)$ auch die Zelle E^i ganz in ihrem Inneren, denn $Y(E^i)$ wird berandet von den freien, d. h. zu E^i fremden Randzellen aller Simplexe $\overline{s^3}$, welche mit der Zelle E^i Punkte gemein haben.

§ 4.

Die gleichmäßige Approximation.

Für die i-Zellen $E^i (i = 0, 1, 2, 3)$ einer M_l-polyedralen Zellmannigfaltigkeit $M^3(E^0, \cdots, E^3)$ sei ein System von Rumpfumgebungen $Y(E^i) (i = 0, 1, 2, 3)$ erklärt.

Unter einer gleichmäßigen Approximation[32]) einer M_l-polyedralen Zellmannigfaltigkeit $M^3(E^0, \cdots, E^3)$ im Sinne einer vorgegebenen Zellmetrik M_g wird die Konstruktion[33]) einer Zellmannigfaltigkeit $\mathsf{M}^3(\mathsf{E}^0, \cdots, \mathsf{E}^3)$ mit folgenden Eigenschaften verstanden: 1. Die Punktmenge von M^3 fällt mit der Punktmenge von M^3 zusammen, 2. M^3 ist im Sinne der vorgegebenen Metrik M_g polyedral, 3. das Schema von M^3 ist mit dem von M^3 identisch, 4. die Rumpfumgebung $Y^*(E^i)$ einer Zelle E^i von M^3 ist auch Rumpfumgebung der entsprechenden „Bildzelle" E^i von M^3. — Die gleichmäßige Approximation eines Schemas im Sinne einer gegebenen Zellmetrik bedeutet also praktisch 1. eine Abänderung des gegebenen Gerüstes unter Wahrung seines topologischen Charakters derart, daß das abgeänderte Gerüst als im Sinne der vorgelegten Zellmetrik polyedral anzusehen ist, und 2. eine Beschränkung dieser Abänderungen auf beliebig kleine Umgebungen der Teilgebilde des abzuändernden Gerüstes.

Die Notwendigkeit solcher M_g-Approximationen für den Hauptsatz der Topologie in drei Dimensionen ergibt sich aus der Tatsache, daß polyedrale Schemata verschiedener Zellmetrik nicht miteinander in der Weise in Beziehung gebracht werden können,

---

[32]) Siehe P.G. I, 6 S. 516.

[33]) Gelegentlich auch das Ergebnis der Konstruktion — d. i. M^3 — ververstanden.

daß sich für beide Schemata konvexe Zellen erklären lassen. Diese sind aber für nachfolgende kombinatorische Überlegungen Voraussetzung. Die Forderung nach gleichmäßiger Approximation — d. i. also Beschränkung der Bildzellen auf vorgeschriebene Umgebungen — entspringt gewissen Konvergenzbetrachtungen[34]).

Bei der Konstruktion solcher gleichmäßigen Approximationen findet eine Reihe von Sätzen, Hilfskonstruktionen und Begriffen wiederholte Anwendung, von denen wir an dieser Stelle nur auf folgende aufmerksam machen:

1. Das Dehnsche Lemma[35]):

Begrenzt eine Kurve auf einem Flächenkomplex im R_3 ein El.Fl.St. ohne Randsingularitäten, so begrenzt sie auch ein völlig singularitätenfreies El.Fl.St.

Dieses Lemma versetzt uns in die Lage, das unter § 2 III, 4 konstruierte M_g-polyedrale, aber nur eindeutig stetige Bild einer M_l-Sphäre S^2 in ein M_g-polyedrales, topologisches Bild von S^2 überzuführen, weil die hierbei erforderlichen Anwendungen des Dehnschen Lemmas stets im Innern eines El.R.St.s durchzuführen sind. — Wir behalten dieses Lemma bei, obschon nach H. Kneser[36]) der von Dehn gelieferte Beweis lückenhaft ist.

2. Die aus dem Begriff der Zellmetrik entspringenden Konstruktionen der Ablösung und Angleichung (s. § 2, III).

3. Verweisung[37]). Hier treten beide Zellmetriken M_l und M_g in eine erste Beziehung zueinander. — Der Elementarraum E^3 habe den Rand S^2 und enthalte in seinem Innern den Rand Σ^1 eines El.Fl.St.s E'^2. Es ist ein El.Fl.St. in Σ^1 einsuspannen, das ganz in E^3 verbleibt: es ist E^2 nach E^3 hinzuverweisen.

4. Absorptionscharakter[38]). $\mathfrak{T}$ sei ein Teilgebilde eines Gebildes $\mathfrak{G}$ und enthalte seinerseits das Teilgebilde $\mathfrak{T}'$: $\mathfrak{G} > \mathfrak{T} > \mathfrak{T}'$.

---

[34]) Siehe Einl. z. 2. Kap. S. 22/23.

[35]) M. Dehn, Über die Topologie des dreidimensionalen Raums. Math. Ann. 69 (1910) S. 147.

[36]) Jahresber. d. D.M.V. 38 (1929) S. 260.

[37]) Siehe P.G. II, 6 S. 521.

[38]) Siehe P.G. I, 6 S. 516.

Für $\mathfrak{T}'$ sind zwei Umgebungen $\overline{\mathfrak{U}}(\mathfrak{T}')$ und $\mathfrak{U}(\mathfrak{T}')$ so vorgelegt, daß $\overline{\mathfrak{U}}(\mathfrak{T}') < \mathfrak{U}(\mathfrak{T}')$ gilt. Wir sagen: $\mathfrak{T}$ habe hinsichtlich $\mathfrak{T}'$ mit Bezug auf die beiden Umgebungen von $\mathfrak{T}'$ den „Absorptionscharakter", wenn folgendes gilt: 1. $\mathfrak{T}$ enthält alle zu $\overline{\mathfrak{U}}(\mathfrak{T}')$ gehörenden Punkte von $\mathfrak{G}$, 2. $\mathfrak{T}$ ist ganz in $\mathfrak{U}(\mathfrak{T})$ enthalten.

§ 5.

Der Schalensatz.

Mit den Methoden der gleichmäßigen Approximation wird beweisbar der

> Schalensatz[39]): Gegeben eine M_l-Sphäre S^2 und im Inneren von S^2 eine M_g-Sphäre Σ^2. Das von S^2 und Σ^2 berandete, abgeschlossene Raumstück ist eine sphärische Schale.

Dieser Homöomorphiesatz enthält zunächst die Aussage, daß zwei ineinanderliegende Sphären — von denen die innere nach außen, die äußere nach innen „regulär berandet" ist — isotop[40]) sind, d. h. daß eine topologische Deformation[40]) existiert, welche beide Sphären über das von ihnen berandete Gebiet hinweg ineinander deformiert. Der Satz enthält aber noch mehr: Die topologische Deformation ist von solcher Art, daß jeder Punkt des Zwischengebiets genau ein- und nur einmal bedeckt wird. Eine solche topologische Deformation möge zum Unterschied von der allgemeinen monoton genannt werden. Dieser Begriff ist nützlich in Ansehung einiger hier zutage tretender Verhältnisse: 1. durch die zwischen zwei ineinander liegenden Sphären S^2 und Σ^2 erklärte monotone topologische Deformation wird jedes M_l- (bzw. M_g-) polyedrale Schema von S^2 (bzw. Σ^2) in ein (im allgemeinen nicht polyedrales) Schema auf Σ^2 (bzw. S^2) übergeführt. 2. Die abgeschlossenen i-Zellen bzw. die einfachen Polygone auf S^2 überstreichen singularitätenfreie, abgeschlossene $(i+1)$-Zellen bzw. singularitätenfreie Ringstreifen. 3. Die Deformationsgebiete paarweise fremder Gebilde sind ebenfalls paarweise fremd.

---

[39]) Siehe P.G. V S. 543.

[40]) Siehe v. Kerékjárto, Flächentopologie, Berlin 1923, S. 7.

Es möge folgender Satz bewiesen werden:

Eine M_g-Sphäre Σ^2 liege im Innern einer M_l-Sphäre S^2; S^2 bzw. Σ^2 tragen je ein Gerüst $S^2(e^0, e^1, e^2)$ bzw. $\Sigma^2(\varepsilon^0, \varepsilon^1, \varepsilon^2)$, derart, daß S^2 und Σ^2 zellweise gleichsinnig topologisch aufeinander abbildbar sind. Zwischen S^2 und Σ^2 existiert eine monotone topologische Deformation, welche das Schema von S^2 in das von Σ^2 längs singularitätenfreier Deformationsgebiete überführt.

Die sphärische Schale $[S^2, \Sigma^2]$ möge auf die Punktmenge $\{1 < x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$ mittels der Abbildungsfunktion G topologisch abgebildet werden. Vermöge G werden die Ränder $\mathfrak{S}_a^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 2\}$ bzw. $\mathfrak{S}_i^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ mit entsprechenden Zellteilungen $\mathfrak{S}_a^2(\mathfrak{e}_a^0, \mathfrak{e}_a^1, \mathfrak{e}_a^2)$ bzw. $\mathfrak{S}_i^2(\mathfrak{e}_i^0, \mathfrak{e}_i^1, \mathfrak{e}_i^2)$ versehen wie S^2 bzw. Σ^2. In $\{1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$ läßt sich eine monotone topologische Deformation D_λ von $\mathfrak{S}_a^2$ nach $\mathfrak{S}_i^2$ erklären durch $\mathsf{D}_\lambda(\mathfrak{S}_a^2) = \{x^2 + y^2 + z^2 = 2 - \lambda\,(0 \leq \lambda \leq 1)\}$. Mit dieser monotonen topologischen Deformation wird das Schema von $\mathfrak{S}_a^2$ radial in ein entsprechendes auf $\mathfrak{S}_i^2$ übergeführt, so daß sich auf dieser Kugel jetzt die beiden Schemata: das ursprüngliche $\mathfrak{S}_i^2(\mathfrak{e}_i^0, \mathfrak{e}_i^1, \mathfrak{e}_i^2)$ und das durch Deformation gewonnene $\mathfrak{S}_i^2(\mathfrak{e}_i^{*0}, \mathfrak{e}_i^{*1}, \mathfrak{e}_i^{*2})$ befinden. Beide Schemata sind gleichsinnig topologisch aufeinander abbildbar, können also nach einem Satz von Tietze[41]) durch eine topologische Deformation $d_\mu(\mathfrak{S}_i^2)\,(0 \leq \mu \leq 1)$ der Kugel $\mathfrak{S}_i^2$ in sich ineinander übergeführt werden (dabei möge $d_0(\mathfrak{S}_i^2) = \mathfrak{S}_i^2(\mathfrak{e}_i^{*0}, \mathfrak{e}_i^{*1}, \mathfrak{e}_i^{*2})$, $d_1(\mathfrak{S}_i^2) = \mathfrak{S}_i^2(\mathfrak{e}_i^0, \mathfrak{e}_i^1, \mathfrak{e}_i^2)$ sein). Diese topologische Deformation erklärt gleichzeitig eine solche der Strahlen des Strahlenbündels 0 durch den gemeinsamen Mittelpunkt der beiden Kugeln $\mathfrak{S}_a^2$ und $\mathfrak{S}_i^2$, d. h. es läßt sich die topologische Deformation von $\mathfrak{S}_i^2$ in sich unabhängig von dem Parameter λ auch für die Sphären $\mathsf{D}_\lambda(\mathfrak{S}_a^2)$ erklären. In $\{1 < x^2 + y^2 + z^2 < 2\}$ läßt sich eine monotone topologische De-

---

[41]) Siehe H. Tietze, Überstetige Abbildungen der Quadratfläche auf sich. Rend. di Palermo (1914) 38 S. 247—304.

formation von $\mathfrak{S}_a^2$ nach $\mathfrak{S}_i^2$, welche die vorgegebenen Schemata $\mathfrak{S}_a^2$ ($\mathfrak{e}_a^0$, $\mathfrak{e}_a^1$, $\mathfrak{e}_a^2$) und $\mathfrak{S}_i^2$ ($\mathfrak{e}_i^0$, $\mathfrak{e}_i^1$, $\mathfrak{e}_i^2$) ineinander überführt, erklären durch $\mathsf{D}_\lambda^*(\mathfrak{S}_a^2) = \mathsf{D}_\lambda \cdot d_\lambda (0 \leq \lambda \leq 1)$, und somit ergibt sich durch Rückabbildung G^{-1} nach $[S^2, \Sigma^2]$ auch in dieser sphärischen Schale die gesuchte monotone topologische Deformation.

Bemerkung: Es ist ersichtlich, daß diese monotone topologische Deformation sich noch so einrichten läßt, daß nicht nur die Zellen e^i von S^2 in die ihnen entsprechenden Zellen ε^i von Σ^2 übergehen, sondern noch weitere M_l-Gebilde auf S^2 in elementarverwandte M_g-Gebilde auf Σ^2 übergeführt werden können, wenn sie nur in die Schemata von S^2 bzw. Σ^2 entsprechend eingelagert sind.

---

2. Kapitel.

M_g-Approximation eines Systems von Rumpfumgebungen $Y^*(E^3)$ einer Mannigfaltigkeit $M^3(E^0, E^1, E^2, E^3)$.

Wie schon bemerkt, zerfällt der Beweis des Hauptsatzes der Topologie in drei Dimensionen im wesentlichen in zwei Teile: einen kombinatorischen und einen approximativen Teil.

Werden in die gegebene Punktmannigfaltigkeit zwei Zellmetriken M_l bzw. M_g eingeführt, so daß die für die Punktmannigfaltigkeit erklärten beiden Schemata je im Sinne einer dieser Metriken polyedral sind, so möge die M_l- bzw. M_g-polyedrale Zellmannigfaltigkeit mit $M^3(E^0, \cdots, E^3)$ bzw. $\overline{M}^3(\overline{E}^0, \cdots, \overline{E}^3)$ bezeichnet werden. Geradlinige Gebilde im Sinne der einen Metrik werden vom Standpunkte der anderen aus als metrisch sehr kompliziert erscheinen. Gewisse, damit zusammenhängende Schwierigkeiten werden dadurch behoben, daß das eine Schema (etwa $M^3(E^0, \cdots, E^3)$) im Sinne der anderen Metrik (also der M_g-Metrik) approximiert wird. Aus Konvergenzgründen muß diese Approximation gleichmäßig sein. Unter der Voraussetzung der Möglichkeit gleichmäßiger Approximationen läßt sich nämlich eine unendliche Folge von solchen M_g-approximierenden Zellmannigfaltigkeiten, welche nicht nur als Ganzes, sondern auch punktweise gegen die vorgelegte M_l-polyedrale Mannigfaltigkeit konvergiert, angeben: Man nehme die $n$te reg. U. von $M^3(E^0, \cdots, E^3)$ und konstruiere zu deren Zellen den Komplex der Y^*-Umgebungen. Durchläuft n alle ganzen Zahlen, und sinken dabei die Durchmesser der 3-Zellen

der $n$ten reg. U. unter jede Größe[42]), so wird auf den Zellen von M^3 eine Intervallschachtelung erklärt, mit deren Hilfe jeder Punkt der Punktmannigfaltigkeit M^3 dargestellt werden kann. Die gleichmäßige M_g-Approximation dieser $n$ten reg. U. erklärt eine Folge der geforderten Art.

Das Ziel dieser Arbeit besteht im wesentlichen darin, die Existenz eines Grundschemas zweier gegebener Schemata einer dreidimensionalen Punktmannigfaltigkeit nachzuweisen. Unter einem Grundschema wird dabei ein solches Schema verstanden, welches die beiden gegebenen Schemata enthält, d. h. ein solches, aus welchem durch Fortlassen gewisser 0-, 1- und 2-Zellen sowohl das erste als auch das zweite hervorgeht (s. Furch I S. 70/80). Dieser Existenznachweis ist aber nur mit Hilfe der gleichmäßigen Approximation zu führen.

Im folgenden wird eine gleichmäßige M_g-Approximation von $M^3(E^0, \cdots, E^3)$ nicht unmittelbar durch eine gleichmäßige M_g-Approximation der einzelnen Zellen E^i $(i = 0, 1, 2, 3)$ geleistet werden, sondern auf dem Umweg über eine M_g-Approximation eines Y^*-Systems von M^3, d. h. der Rumpfumgebungen $Y^*(E^i)$ aller E^i $(i = 0, 1, 2, 3)$ von $M^3(E^0, \cdots, E^3)$. Die Zweckmäßigkeit dieses Umwegs besteht erstens darin, daß trotz der Vergrößerung der Zellenanzahl der Komplex der Rumpfumgebungen ein spezielleres Schema hat als die ursprüngliche Zellmannigfaltigkeit: in jeder 0-Zelle treffen nämlich nur 4 1-Zellen und in jeder 1-Zelle nur 3 2-Zellen zusammen. In jeder einzelnen Rumpfumgebung für sich ist jede 0-Zelle gemeinsame Randzelle von 3 1-Zellen und 3 2-Zellen. Ferner lassen sich die Zellen der Umgebungen $Y^*(E^1)$ bzw. $Y^*(E^2)$ als Summe zweier El.Fl.Ste. und eines (radial unterteilten) Ringstreifens darstellen. Zweitens besteht die Zweckmäßigkeit dieses Umweges darin, daß nicht durchweg gleichmäßige Approximationen nötig sind, daß man vielmehr — wie wir sofort erklären werden — sich bis zu einem gewissen Grade nur auf die Abänderungen zu beschränken brauchen.

[42]) Dies ist nicht immer der Fall. Es ist nötig, daß die bei jeder weiteren reg. U. eingeführten neuen 0-Zellen schließlich in den Ausgangszellen dicht liegen.

Dabei wird die oben erwähnte Möglichkeit der Zusammenfassung der Randzellen von $\Upsilon^*(E^1)$ und $\Upsilon^*(E^2)$ zu El.Fl.St.en und Ringstreifen sich als besonders dienlich erweisen. — Von den die M_l-polyedralen Umgebungen $\Upsilon^*(E^i)$ bzw. $\Upsilon(E^i)$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ ersetzenden M_g-polyedralen Umgebungen $\mathsf{Y}^*(E^i)$ bzw. $\mathsf{Y}(E^i)$ werden folgende Eigenschaften gefordert: 1. Jede Umgebung $\mathsf{Y}(E^i)$ ist ganz in der ihr entsprechenden Umgebung $\Upsilon(E^i)$ enthalten, 2. je zwei Umgebungen $\mathsf{Y}^*(E_k^i)$ und $\mathsf{Y}^*(E_l^i)$ sind bei gleicher Dimensionszahl i und $k \neq l$ — auch in den Rändern — fremd. 3. Je zwei Umgebungen $\mathsf{Y}(E_k^i)$ und $\mathsf{Y}(E_l^i)$ haben nur die Y-Umgebungen der gemeinsamen — echten oder unechten [30]) — Randzellen von E_k^i und E_l^i und sonst nichts gemein. Nicht notwendig braucht die Umgebung $\mathsf{Y}(E^i)$ die Zelle E^i — im Gegensatz zu den Umgebungen $\Upsilon(E^i)$ (s. § 3) — ganz oder teilweise in ihrem Inneren zu enthalten.

§ 6.

Konstruktion von $\mathsf{Y}^*(E^0)$.

Es sei E^0 eine 0-Zelle der Zellmannigfaltigkeit $M^3(E^0, \cdots, E^3)$. Der Rand ihrer Umgebung $\Upsilon^*(E^0)$ bzw. $\Upsilon(E^0)$ werde mit $S^{*2(0)}$ bzw. $S^{2(0)}$ bezeichnet. Im Inneren der Sphäre $S^{*2(0)}$ wird eine beliebige M_g-Sphäre konstruiert: $\Sigma^{*2(0)}$. Das abgeschlossene, von $\Sigma^{*2(0)}$ berandete El.R.St. wird als M_g-polyedrale Umgebung $\mathsf{Y}^*(E^0)$ erklärt. Analog $\Upsilon(E^0) = \Upsilon^*(E^0)$ wird $\mathsf{Y}(E^0)$ durch $\mathsf{Y}(E^0) = \mathsf{Y}^*(E^0)$ definiert. (Aus der Fremdheit der Umgebungen $\Upsilon^*(E^0)$ für verschiedene 0-Zellen folgt die Fremdheit der entsprechenden $\mathsf{Y}^*(E^0)$.)

Die endgültige Zerlegung der Berandung $\Sigma^{*2(0)}$ von $\mathsf{Y}^*(E^0)$ in Zellen wird sukzessive gewonnen. Vorläufig wird eine Hilfseinteilung der Sphären $\Sigma^{*2(0)}$ erklärt. Nach dem Schalensatz und dem Zusatz (s. § 5) existiert zwischen $S^{*2(0)}$ und $\Sigma^{*2(0)}$ eine solche monotone topologische Deformation — sie möge mit $\mathsf{D}^{(0)}$ bezeichnet werden —, welche die M_l-polyedralen Zellen von $S^{*2(0)}$ längs singularitätenfreier Deformationsgebiete in M_g-polyedrale Zellen auf der Sphäre $\Sigma^{*2(0)}$ überführt.

§ 7.

Konstruktion von $Y^*(E^1)$.

Die 1-Zelle E^1 werde von den beiden 0-Zellen $E_1{}^0$ und $E_2{}^0$ berandet. Die zugehörigen Rumpfumgebungen sind $Y^*(E^1)$ und $Y^*(E_k{}^0)$ mit den Randsphären $S^{*2(1)}$ und $S_k{}^{*2(0)}$. Für die Umgebung $Y(E^1)$ gilt: $Y(E^1) = Y^*(E_1{}^0) + Y^*(E^1) + Y^*(E_2{}^0)$. Der Durchschnitt der Sphären $S_k{}^{*2(0)}$ mit $S^{*2(1)}$ sind die Elementar-Fl.Ste. $e_k{}^{*2}$, welche auch einschließlich ihrer Ränder $s_k{}^{*1}$ noch elementar sind. Die Komplemente der abgeschlossenen El.Fl.Ste. $e_k{}^{*2} + s_k{}^{*1}$ bezüglich der Sphäre $S_k{}^{*2(0)}$ sind die El.Fl.Ste. $\overline{e_k{}^{*2}}$. Mit diesen Bezeichnungen ergeben sich folgende Zerlegungen:

$$S_k{}^{*2(0)} = e_k{}^{*2} + s_k{}^{*1} + \overline{e_k{}^{*2}} \quad (k = 1, 2)$$
$$S^{*2(1)} = e_1{}^{*2} + s_1{}^{*1} + R^{*2} + s_2{}^{*1} + e_2{}^{*2}$$

und vermöge $\mathsf{D}^{(0)}$

$$\Sigma_k{}^{*2(0)} = \varepsilon_k{}^{*2} + \sigma_k{}^{*1} + \overline{\varepsilon_k{}^{*2}} \quad (k = 1, 2)$$

mit den Deformationsgebieten $[e_k{}^{*2}, \varepsilon_k{}^{*2}] = e_k{}^{*3}$ und

$$[s_k{}^{*1}, \sigma_k{}^{*1}] = r_k{}^{*2} \quad (k = 1, 2).$$

Die zu leistenden Konstruktionen werden in zwei Schritten ausgeführt: 1. es wird eine sphärische Schale $\mathfrak{W}^3$ konstruiert, welche im Inneren und auf dem Rande von $Y(E^1)$ liegt. 2. In der sphärischen Schale $\mathfrak{W}^3$ wird eine M_g-Sphäre $\tilde{\Sigma}^{2(1)}$ konstruiert, aus welcher durch geeignete Abänderungen die gesuchte Sphäre $\Sigma^{*2(1)}$, der Rand der zu konstruierenden Umgebung $Y^*(E^1)$, gewonnen wird. Dabei haben wir uns der Möglichkeit einer geeigneten monotonen topologischen Deformation zwischen $S^{*2(1)}$ und $\Sigma^{*2(1)}$ zu versichern.

I. Konstruktionen innerhalb $Y(E^1)$.

I, 1. Konstruktion der sphärischen Schale $\mathfrak{W}^3$. Auf dem El.Fl.St. $e_k{}^{*2}$ der Sphäre $S_k{}^{*2(0)}$ wird je eine 1-Sphäre $\tilde{s}_k{}^1$ konstruiert, welche $e_k{}^{*2}$ in ein El.Fl.St. $\tilde{e}_k{}^2$ und einen Ringstreifen $r_k{}^2$

zerlegt: $e_k^{*2} = \tilde{e}_k^2 + \hat{s}_k^1 + r_k^2 + s_k^{*1}$ $(k = 1, 2)$. In die Sphären $\hat{s}_k^1$ $(k = 1, 2)$ wird im Inneren von $S^{*2(1)}$ ein Ringstreifen $\widetilde{R}^2$ eingespannt, derart, daß $\widetilde{R}^2$ mit den Ringstreifen R^{*2} und r_k^2 $(k = 1, 2)$ zusammen einen Raumring R^3 berandet. — Analog werden in den El.Fl.St.en ε_k^{*2} $(k = 1, 2)$ je eine 1-Sphäre $\widetilde{\sigma}_k^1$ gewählt, welche ε_k^{*2} zerlegt in ein El.Fl.St. $\tilde{\varepsilon}_k^2$ und einen Ringstreifen ϱ_k^2: $\varepsilon_k^{*2} = \tilde{\varepsilon}_k^{*2} + \widetilde{\sigma}_k^1 + \varrho_k^2 + \sigma_k^{*1}$ $(k = 1, 2)$. Von der in § 6 erklärten monotonen topologischen Deformation $\mathsf{D}^{(0)}$ werde noch verlangt, daß $\mathsf{D}^{(0)}$ auch noch $\widetilde{s}_k^1$ längs singularitätenfreier Ringstreifen $\widetilde{\mathfrak{r}}_k^2$ nach $\widetilde{\sigma}_k^1$ bzw. die Ringstreifen r_k^2 längs singularitätenfreier Raumringe $\mathfrak{r}_k^3$ nach ϱ_k^2 $(k = 1, 2)$ überführe (s. Bemerkung Schluß von § 5). — Durch Ablösen des El.Fl.St.s ε_k^{*2} (unter Festhalten seines Randes σ_k^{*1}) ins Innere der Sphäre $\Sigma_k^{*2(0)}$ entsteht das El.Fl.St. $^*\varepsilon_k^2$, welches mit σ_k^{*1} und ε_k^{*2} zusammen einen El.R. E_k^3 $(k = 1, 2)$ berandet. Die Konstruktion wird derart ausgeführt, daß die durch Ablösen verschiedener ε_k^{*2} derselben Sphäre $\Sigma_k^{*2(0)}$ entstehenden El.R.St.e E_k^3 alle paarweise fremd zueinander sind.

Die Raumringe $\mathfrak{r}_k^3$ $(= [r_k^2, \varrho_k^2])$ und R^3 lassen sich zu dem Raumring $\mathfrak{R}^3 = \mathfrak{r}_1^3 + r_1^2 + R^3 + r_2^2 + \mathfrak{r}_2^3$ zusammenfassen. Mit den El.R.St.en E_k^3 $(k = 1, 2)$ zusammen bildet der Raumring $\mathfrak{R}^3$ die sphärische Schale $\mathfrak{W}^3 = \mathsf{E}_1^3 + \varrho_1^2 + \mathfrak{R}^3 + \varrho_2^2 + \mathsf{E}_2^3$ mit den Randsphären $\widetilde{\mathfrak{S}}^2 = \widetilde{\varepsilon}_1^2 + \widetilde{\sigma}_1^1 + \widetilde{\mathfrak{R}}^2 + \widetilde{\sigma}_2^1 + \widetilde{\varepsilon}_2^2$ und $\mathfrak{S}^{*2} = {}^*\varepsilon_1^2 + \sigma_1^{*1} + \mathfrak{R}^{*2} + \sigma_2^{*1} + {}^*\varepsilon_2^2$, wenn unter den Ringstreifen $\widetilde{\mathfrak{R}}^2$ bzw. $\mathfrak{R}^{*2}$ verstanden wird: $\widetilde{\mathfrak{R}}^2 = \tilde{\mathfrak{r}}_1^2 + \widetilde{s}_1^1 + \widetilde{R}^2 + \widetilde{s}_2^1 + \widetilde{\mathfrak{r}}_2^2$ bzw. $\mathfrak{R}^{*3} = \mathfrak{r}_1^{*2} + s_1^{*1} + R^{*2} + s_2^{*1} + \mathfrak{r}_2^{*2}$.

İ, 2. Konstruktion der M_g-Sphäre $\Sigma^{*2(1)}$. Auf dem Ringstreifen r_k^2 wird eine in r_k^2 irreduzible 1-Sphäre $s_k'^1$ $(k = 1, 2)$ konstruiert; zwischen $s_1'^1$ und $s_2'^1$ wird ein in R^3 irreduzibel verlaufender Ringstreifen R'^2 eingespannt. Auf dem Ringstreifen ϱ_k^2 werde sodann eine 1-Sphäre $\sigma_k'^1$ erklärt. Die Deformation $\mathsf{D}^{(0)}$ möge auch noch $s_k'^1$ längs eines singularitätenfreien, in $\mathfrak{r}_k^3$ irreduzibel verlaufenden Ringstreifens $\mathfrak{r}_k'^2$ nach $\sigma_k'^1$ überführen. Bei der Konstruktion der Sphären $\sigma_k'^1$ möge darauf geachtet werden, daß $\sigma_k'^1$ ganz in einem Absorptionsringstreifen φ_k^2 enthalten ist, der seinerseits ganz in dem Ringstreifen ϱ_k^2 verbleibt. — Mittels

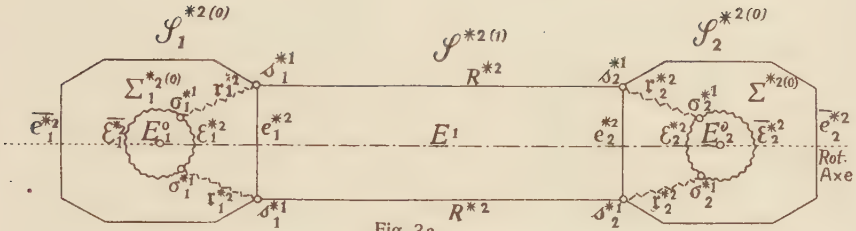

Fig. 3a.

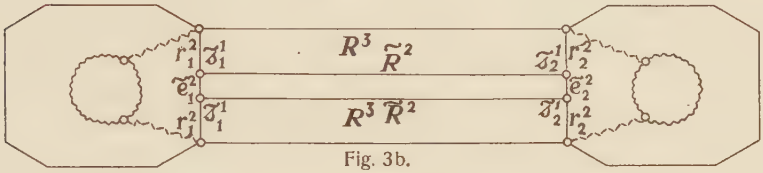

Fig. 3b.

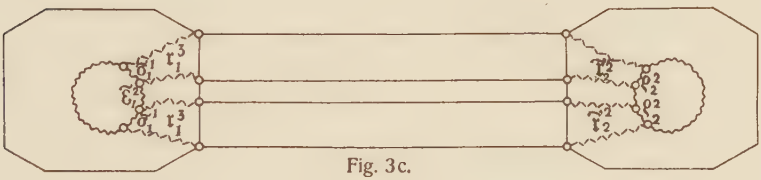

Fig. 3c.

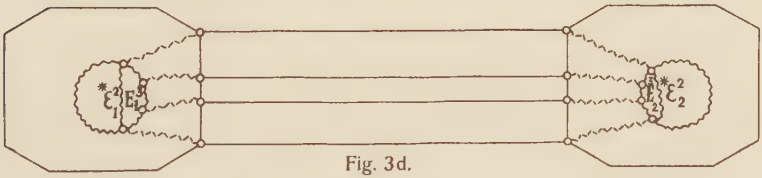

Fig. 3d.

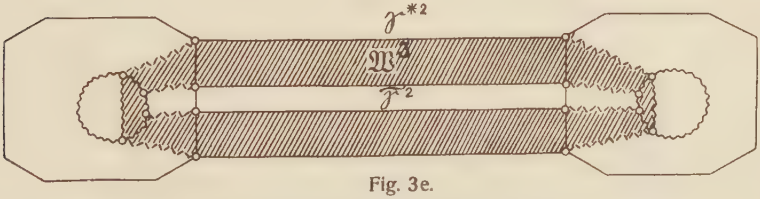

Fig. 3e.

Die Entwicklung der sphärischen Schale $\mathfrak{W}^3$.

3a) Die Zerlegungen von $\mathfrak{S}_k^{*2(0)}$, $\mathfrak{S}^{*2(1)}$ und $\Sigma_k^{*2(0)}$ $(k=1,2)$.

3b) Konstruktion von $\tilde{s}_k^1$ (und damit von $\tilde{e}_k^2$ und r_k^2 $(k=1,2)$) und von $\tilde{R}^2$ und damit R^3.

3c) Konstruktion von $\tilde{\sigma}_k^1$ (und damit $\tilde{\varepsilon}_k^2$ und ϱ_k^2 $(k=1,2)$) und $\tilde{\tau}_k^2$ und damit τ_k^3 $(k=1,2)$.

3d) Konstruktion von ${}^*\varepsilon_k^2$ und damit E_k^3 $(k=1,2)$.

3e) Die sphärische Schale $\mathfrak{W}^3$.

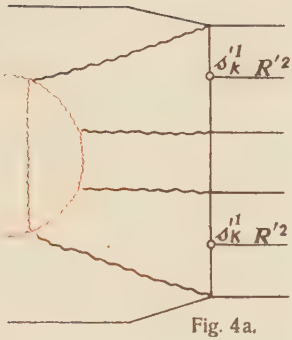

Fig. 4a.

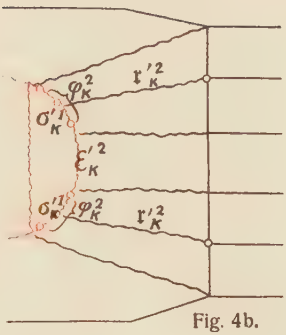

Fig. 4b.

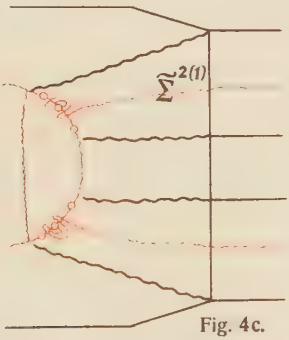

Fig. 4c.

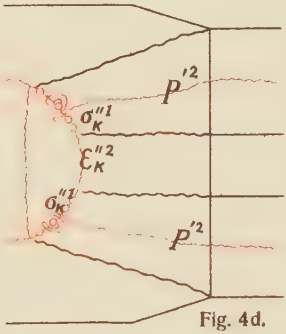

Fig. 4d.

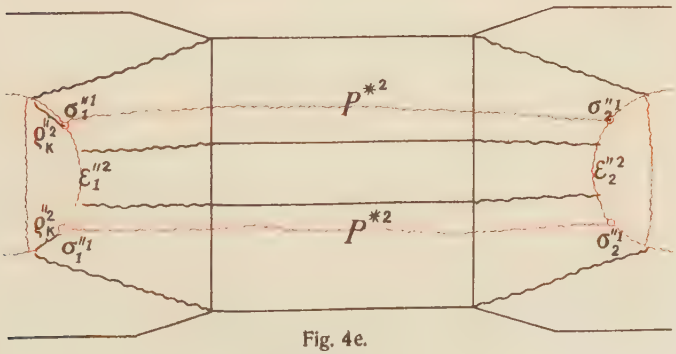

Fig. 4e.

Die Sphäre $\Sigma^{*2(1)}$.

4a) Konstruktion von s'^1_k und R^2 $(k=1,2)$.

4b) Konstruktion von σ'^1_k mit φ^2_k, ε'^2_k und τ'^2_k $(k=1,2)$.

4c) Konstruktion der Sphäre $\tilde{\Sigma}^{2(1)}$.

4d) Konstruktion von σ''^1_k und ε''^2_k $(k=1,2)$.

4e) Die Sphäre $\Sigma^{*2(1)}$; Konstruktion des Ringstreifens P^{*2}.

einer genügend feinen M_g-Approximation (s. § 3 III, 4) wird die Sphäre $\mathfrak{S}'^{2(1)} = \varepsilon_1'^2 + \sigma_1'^1 + \mathfrak{r}_1'^2 + s_1'^1 + R'^2 + s_2'^1 + \mathfrak{r}_2'^2 + \sigma_2'^1 + \varepsilon_2'^2$ in das M_g-polyedrale, aber nur eindeutig stetige Bild $\tilde{\Sigma}^{2(1)}$ einer Sphäre umgewandelt, welches durch Anweudung des Dehnschen Lemmas (s. § 4 S. 18) in die M_g-Späre $\Sigma'^{2(1)} = \varepsilon_1''^2 + \sigma_1''^1 + \mathsf{P}'^2 + \sigma_2''^1 + \varepsilon_2''^2$ übergeht. Die Sphären $\sigma_k''^1$ werden dabei so gewählt, daß 1. sie ganz in den Absorptionsstreifen φ_k^2 über $\sigma_k'^1$ verbleiben und 2. die durch $\sigma_k''^1$ erklärten El.Fl.St.e $\varepsilon_k''^2$ ($\varepsilon_k^{*2} = \varepsilon_k''^2 + \sigma_k''^1 + \varrho_k''^2 + \sigma_k^{*1}$) nicht mehr von der M_g-Sphäre $\tilde{\Sigma}^{2(1)}$ durchsetzt werden. — Der Ringstreifen P'^2 ist — auch abzüglich seines in ϱ_k^2 irreduzibel verlaufenden Randes $\sigma_k''^1$ — im allgemeinen nicht fremd zu den Ringstreifen ϱ_k^2 ($k = 1, 2$). Durch Angleichung [43]) von P'^2 an $\varrho_k''^2$ entsteht ein Ringstreifen P^{*2}, welcher nur noch in seinen Rändern $\sigma_k''^1$ gemeinsame Punkte mit ϱ_k^2 besitzt und sonst ganz im Innern des Raumrings $\mathfrak{R}^3$ verbleibt.

Die M_g-Sphäre $\Sigma^{*2(1)} = \varepsilon_1''^2 + \sigma_1''^1 + \mathsf{P}^{*2} + \sigma_2''^1 + \varepsilon_2''^2$ ist die Berandung der zu konstruierenden Umgebung $\mathsf{Y}^*(E^1)$. Aus der Fremdheit der sphärischen Schalen $\mathfrak{W}^3$ für verschiedene 1-Zellen ergibt sich die Fremdheit von $\mathsf{Y}^*(E_k^1)$ und $\mathsf{Y}^*(E_l^1)$ für $k \neq l$. Wird die Umgebung $\mathsf{Y}(E^1)$ entsprechend der Umgebung $Y(E^1)$ als Vereinigungsmenge der Umgebungen $\mathsf{Y}^*(E^1)$ und $\mathsf{Y}^*(E_k^0)$ ($k = 1, 2$) erklärt, so folgt aus den voraufgegangenen Konstruktionen für $\mathsf{Y}(E^1) : \mathsf{Y}(E^1) < Y(E^1)$.

Die in §§ 6 und 7 durchgeführten Konstruktionen geben Veranlassung zu einer monotonen topologischen Deformation — sie möge $\mathsf{D}^{(1)}$ heißen — mit folgenden Eigenschaften: $\mathsf{D}^{(1)}$ deformiert den aus der Gesamtheit aller $\Sigma^{*2(0)}$ und $\Sigma^{*2(1)}$ bestehenden Komplex K derart in den aus allen M_l-Sphären $S^{*2(0)}$ und $S^{*2(1)}$ bestehenden Komplex K, daß 1. die M_g-Sphären $\Sigma^{*2(0)}$ bzw. $\Sigma^{*2(1)}$ in ihre entsprechenden M_l-Sphären $S^{*2(0)}$ bzw. $S^{*2(1)}$ übergeführt werden und dabei 2. die Ränder des vollständigen Durchschnittes aller M_g-Sphären (das sind die 1-Sphären σ''^1) längs singularitätenfreier, innerhalb der zugehörigen Sphären $S^{*2(0)}$ verbleibender (paarweise fremder) Ringstreifen in die entsprechenden Ränder

[43]) Siehe P.G. II, 5. 41 S. 521.

des vollständigen Durchschnittes aller M_l-Sphären (das sind die 1-Sphären s^{*1}) übergehen. Vermöge $\mathsf{D}^{(1)}$ wird das Zellschema des M_l-Komplexes K auf den M_ϱ-Komplex K übertragen. Insbesondere wird die radiale Unterteilung der Ringstreifen R^{*2} auf die Ringstreifen P^{*2} übertragen. Die Rechtfertigung für die Konstruktion dieser monoton topologischen Deformation liegt in ihrer Notwendigkeit für die später durchzuführenden Konstruktionen zu den Umgebungen $\mathsf{Y}^*(E^2)$.

II. Existenznachweis für die Deformation $\mathsf{D}^{(1)}$.

Die monotone topologische Deformation $\mathsf{D}^{(1)}$ ist sichergestellt, wenn sich zeigen läßt, daß die Ringstreifen P^{*2} und $\mathfrak{R}^{*2}$ monoton topologisch ineinander deformiert werden können unter der Voraussetzung, daß ihre Ränder $\sigma_k''^1$ bzw. σ_k^{*1} längs der Ringstreifen $\varrho_k''^2 (k = 1,2)$ monoton ineinander übergehen. In diesem Falle ist das von den 4 Ringstreifen P^{*2}, $\varrho_1''^2$, $\mathfrak{R}^{*2}$, $\varrho_2''^2$ berandete, abgeschlossene Raumstück ein Raumring, welcher mit $\mathfrak{R}_a{}^3$ bezeichnet werde. Nach einer geeigneten Metrisierung von $\mathfrak{R}_a{}^3$ läßt sich durch Ablösen des Ringstreifens $\varrho_k''^2 + \mathfrak{r}_k^{*2}$ (unter Festhalten seiner Ränder $\sigma_k''^1$ bzw. $s_k^{*1} (k = 1, 2)$ ins Innere des Raumringes $\mathfrak{R}_a{}^3$ ein Ringstreifen $\overline{\mathfrak{r}_k{}^2}$ gewinnen. $\mathfrak{r}_k{}^2$ kann dabei noch so eingerichtet werden, daß er ganz in dem Durchschnitt von $\mathfrak{R}_a{}^3$ mit $Y(E_k{}^0)$ verbleibt.

Die Ringstreifen $\overline{\mathfrak{r}_k{}^2}$ $(k = 1,2)$ beranden zusammen mit den Ringstreifen P^{*2} und $\mathfrak{R}^{*2}$ einen Raumring, in welchem zwischen P^{*2} und $\mathfrak{R}^{*2}$ eine monotone topologische Deformation — $\overline{\mathsf{D}^{(1)}}$ — erklärt werden kann. Dabei führt $\overline{\mathsf{D}^{(1)}}$ die Ränder $\sigma_k''^1$ bzw. s_k^{*1} von P^{*2} bzw. $\mathfrak{R}^{*2}$ längs $\overline{\mathfrak{r}_k{}^2} (k = 1,2)$ ineinander über. — Durch die simultane Durchführung aller $\overline{\mathsf{D}^{(1)}}$ (die wegen der Fremdheit der $\mathfrak{W}_n{}^3$ keine Schwierigkeiten bereitet) werden die Ränder der El.Fl.St.e $\varepsilon_k''^2$ derselben Sphäre $\Sigma^{*2(0)}$ längs der singularitätenfreien Ringstreifen $\overline{\mathfrak{r}_k{}^2}$ in die Ränder s_k^{*1} der El. Fl.St.e e_k^{*2} derselben, $\Sigma^{*2(0)}$ entsprechende Sphäre $S^{*2(0)}$ deformiert. Damit ist gleichzeitig für alle El.Fl.St.e $\varepsilon_k''^2$ von $\Sigma^{*2(0)}$ eine monotone topologische Deformation nach den El.Fl.St.en e_k^{*2}

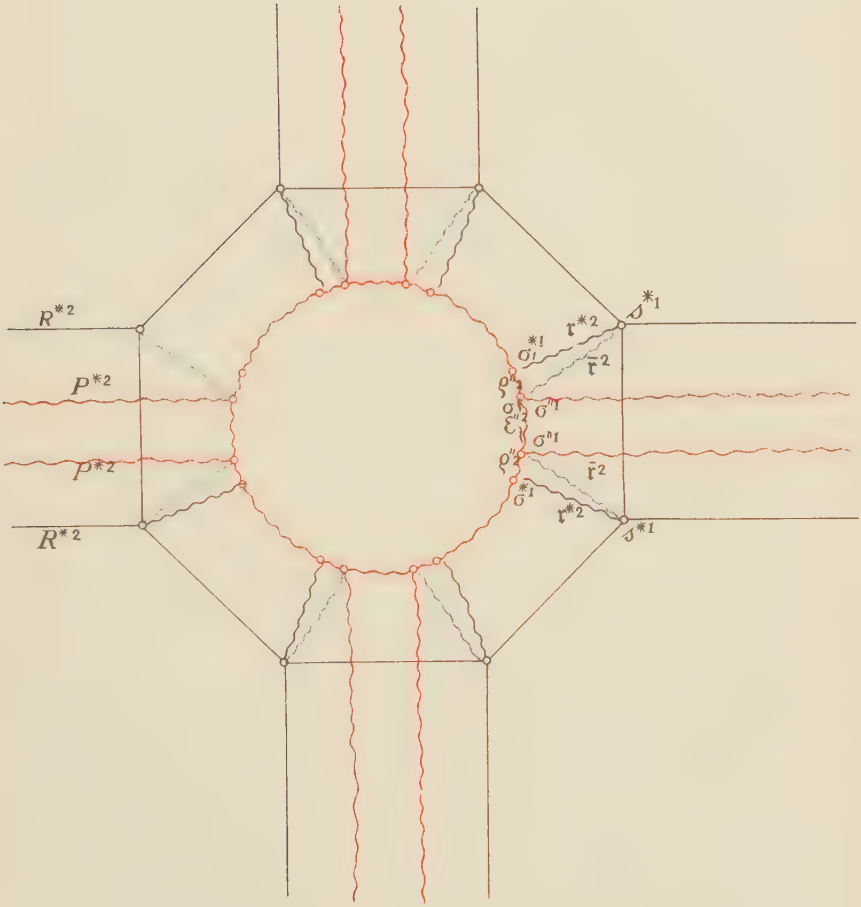

Fig. 5.

Skizze zu der Erklärung der monotonen topologischen Deformationen $\bar{D}^{(0)}$ und $\bar{D}^{(1)}$. An eine Rumpfumgebung $Y^*(E^0)$ sind vier Rumpfumgebungen $Y^*(E^1)$ angeheftet. In diesen Komplex sind die entsprechenden M_g-Rumpfumgebungen $Y^*(E^0)$ und $Y^*(E^1)$ gezeichnet. Ferner sind angegeben die Deformationswege τ^{*2} von s^{*1} nach σ^{*1} und $\bar{\tau}^2$ von s^{*1} nach σ''^1.

von $S^{*2(0)}$ erklärt. Diese voneinander unabhängigen Teildeformazwischen $\Sigma^{*2(0)}$ und $S^{*2(0)}$ lassen sich zu einer einzigen monoton topologischen Deformation — $\mathsf{D}^{(0)}$ — von $\Sigma^{*2(0)}$ nach $S^{*2(0)}$ ergänzen. Das Komplement aller El.Fl.St.e ε_k^{*2} bzw. aller $\varepsilon_k''^2$ bezüglich $\Sigma^{*2(0)}$ werde mit Γ^{*2} bzw. Γ''^2, das aller El.Fl.St.e e_k^{*2} bezüglich $S^{*2(0)}$ mit G^2 bezeichnet. Die abgeschlossenen Gebiete $\mathfrak{G}^{*3}$ bzw. $\mathfrak{G}''^3$, welche berandet sind 1. von Γ^{*2} bzw. Γ''^2, 2. von den Ringstreifen $\mathfrak{r}^{*2}$ bzw. $\overline{\mathfrak{r}^2}$ und 3. von G^2, sind nach Konstruktion homöomorph [44]). Zwischen $\mathfrak{G}^{*3}$ und $\mathfrak{G}''^3$ wird eine topologische Abbildung g hergestellt, welche entsprechende Randgebilde von $\mathfrak{G}^{*3}$ und $\mathfrak{G}''^3$ ineinander überführt, also speziell Γ^{*2} auf Γ''^2 und entsprechende $\mathfrak{r}^{*2}$ und $\overline{\mathfrak{r}^2}$ aufeinander abbildet. g sei dabei noch von der Art, daß die auf $\mathfrak{r}^{*2}$ durch $\mathsf{D}^{(0)}$ erklärten Zwischenlagen für die Sphären s^{*1} abgebildet werden auf die auf $\overline{\mathfrak{r}^2}$ vermöge $\overline{\mathsf{D}^{(1)}}$ erklärte Zwischenlagen von s^{*1}. Die in $\mathfrak{G}^{*3}$ durch $\mathsf{D}^{(0)}$ erklärten Deformation von Γ^{*2} nach G^2 läßt sich nun durch g auf $\mathfrak{G}''^3$ übertragen als Deformation zwischen Γ''^2 und G^2: $\overline{\mathsf{D}^{(0)}} \cdot \overline{\mathsf{D}^{(0)}}$ schließt infolge der an g gestellten Forderungen stetig längs der Ringstreifen $\overline{\mathfrak{r}^2}$ an die Deformation $\overline{\mathsf{D}^{(1)}}$ an. — Die Gesamtheit aller $\mathsf{D}^{(0)}$ und $\overline{\mathsf{D}^{(1)}}$ ergeben zusammen die gesuchte monotone topologische Deformation $\mathsf{D}^{(1)}$.

Es bleibt also die Aufgabe übrig, zu zeigen, daß sich die Ringstreifen $\mathfrak{R}^{*2}$ und P^{*2} monoton topologisch ineinander deformieren lassen, wenn für ihre Ränder die Ringstreifen $\varrho_k''^2$ als Deformationsgebiete vorgegeben werden. — Zu diesem Zwecke wird eine ganz in der sphärischen Schale $\mathfrak{W}^3$ liegenden Sphäre Σ^2 konstruiert, welche P^{*2} enthält: das El.Fl.St. $\varepsilon_k''^2$ $(k = 1,2)$ wird (unter Festhalten seines Randes $\sigma_k''^1$) ins Innere von E_k^3 abgelöst, so daß ein El.Fl.St. $''\varepsilon_k^2$ entsteht. Von der Sphäre $\Sigma^2 = ''\varepsilon_1^2 + \sigma_1''^1 + \mathsf{P}^{*2} + \sigma_2''^1 + ''\varepsilon_2^2$ läßt sich zeigen, daß sie in $\mathfrak{W}^3$ irreduzibel liegt, d. h. die Randsphären $\mathfrak{S}^{*2}$ bzw. $\widetilde{\mathfrak{S}}^2$ von $\mathfrak{W}^3$ in $\mathfrak{W}^3$ trennt: 2 Streckenzüge $\mathfrak{P}_k^1$ bzw. $\mathfrak{Q}^1$, welche — abgesehen von

[44]) Da $\mathfrak{G}''^3$ aus $\mathfrak{G}^{*3}$ durch Ablösen der $\mathfrak{G}^{*3}$ berandenden Ringstreifen $\mathfrak{r}^{*2} + \varrho''_2$ (unter Festhalten ihrer Ränder s^{*1} und σ''^1) ins Äußere von $\mathfrak{G}^{*3}$ entsteht.

ihren Randpunkten — ganz im Inneren des El.R.St.s E_k^3 bzw. des Raumringes $\mathfrak{R}^3$ vorlaufen, werden durch einfache Streckenzüge auf den Sphären $\mathfrak{S}^{*2}$ bzw. $\widetilde{\mathfrak{S}}^2$ zu einer 1-Sphäre $\mathfrak{S}^1$ ergänzt. $\mathfrak{S}^1$ trifft die Sphäre Σ^2 in einer geraden Anzahl von Punkten, und da die Schnittpunktanzahl $[\mathfrak{S}^1 \times {}''\varepsilon_k^2]$ ungerade ist (${}''\varepsilon_k^2$ trennt in E_k^3 die El.Fl.St.e ${}^*\varepsilon_k^2$ und $\widehat{\varepsilon}_k^2$), so ist auch die Schnittpunktanzahl $[\mathfrak{S}^1 \times P^{*2}]$ ungerade, weil es außer diesen beiden Arten von Schnittpunkten keine andere von $\mathfrak{S}^1$ mit Σ^2 gibt.

Aus der Irreduzibilität von Σ^2 in $\mathfrak{W}^3$ würde nach dem Schalensatze folgen: Σ^2 zerlegt $\mathfrak{W}^3$ in zwei sphärische Schalen $\mathfrak{W}_a{}^3 = [\mathfrak{S}^{*2}, \Sigma^2]$ und $\mathfrak{W}_i{}^3 = [\Sigma^2, \widetilde{\mathfrak{S}}^2]$. Nach Konstruktion werden von diesen sphärischen Schalen durch die Ringstreifen $\varrho_{a,k}^2$ $(= \varrho_k{}''^2)$ [45]) bzw. $\varrho_{i,k}^2$ (d. i. das Komplement von $\varrho_k{}''^2 = \varrho_{a,k}^2$ bezüglich $\varrho_k{}^2$) [45]) El.R.St.e $E_{a,k}^3$ bzw. $E_{i,k}^3 (k = 1,2)$ abgetrennt. Ob die verbleibenden Resträume aber Raumringe sind, läßt sich so nicht folgern. — Der Nachweis dafür wird mit denselben Methoden geführt, mit welchen der Schalensatz bewiesen wurde.

Zwischen den Sphären Σ^2 und $\mathfrak{S}^{*2}$ werde eine unendliche Folge von paarweise fremden M_d-Sphären $\mathfrak{S}_n{}^2 (n = 1, 2, \cdots)$ konstruiert, die 1. im Sinne einer monotonen Deformation gegen $\mathfrak{S}^{*2}$ konvergieren und 2. an den Ringstreifen $\varrho_{a,k}^2$ $(k = 1, 2)$ durch 1-Sphären $s_{n,k}^1 (k = 1,2;\ n = 1, 2 \cdots)$ gescheitelt sind [46]). Dazu ist nur nötig, auf den Ringstreifen $r_k{}^2$ bzw. $\varrho_k{}^2$ je eine unendliche Folge von paarweise fremden, in $r_k{}^2$ bzw. $\varrho_k{}^2$ irreduziblen 1-Sphären $\{s_{n,k}^1\}$ bzw. $\{\sigma_{n.k}^1\}$ [47]) zu erklären, welche alle außerhalb von Σ^2 liegen, und von $D^{(0)}$ (s. § 6) zu verlangen, daß diese Deformation auch noch die Sphären $s_{n,k}^1$ und $\sigma_{n,k}^1$ bei gleichem k und n längs singularitätenfreier Ringstreifen ineinander über-

[45]) Für die nachfolgenden Ausführungen werden — aus Symmetriegründen — gelegentlich Bezeichnungsänderungen vorgenommen.

[46]) Man beachte, daß diese im Sinne der deutschen Metrik polyedralen Sphären auch als im Sinne der griechischen Metrik polyedral aufgefaßt werden können.

[47]) Welche den vollständigen Durchschnitt der zu konstruierenden Sphäre $\mathfrak{S}_n^2$ mit dem Ringstreifen $r_{a,k}^2$ bzw. $\varrho_{a,k}^3$ ausmachen.

führen. Im übrigen führen die analogen Konstruktionen von I, 2 zu der gewünschten Folge. — Die von den Sphären $\mathfrak{S}_n^2$ und $\mathfrak{S}_{n+1}^2$ berandeten sphärischen Schalen $\mathfrak{W}_n^3$ seien mit einem zu dem in P. G. IV, 4.1 [48]) analogen Schema versehen. Unter den auftretenden Breitenkreisen $\mathfrak{B}_n^1$ und $\mathfrak{B}_{n+1}^2$ und den zwischen ihnen in $\mathfrak{W}_n^3$ liegenden Ringstreifen $\mathfrak{B}_n^2$ sollen insbesondere enthalten sein die die 2-Sphären $\mathfrak{S}_n^2$ bzw. $\mathfrak{S}_{n+1}^2$ scheitelnden 1-Sphären $\mathfrak{s}_{n,k}^1$ bzw. $\mathfrak{s}_{n+1,k}^1 (k = 1, 2)$ sowie die zwischen ihnen auf $\varrho_{a,k}^2$ irreduzibel verlaufenden Ringstreifen $\mathfrak{r}_{n,k}^2$ (die auch wieder als im Sinne der M_g-Metrik polyedral angesehen werden können). Das auf $\mathfrak{S}_n^2$ durch die Teilung von $\mathfrak{W}_{n-1}^3$ erhaltene Schema ($\mathfrak{S}_n^2$ ist Außenrand von $\mathfrak{W}_{n-1}^3$) soll beibehalten werden, wenn die Teilung von $\mathfrak{W}_n^3$ ($\mathfrak{S}_n^2$ ist Innenrand von $\mathfrak{W}_n^3$) gewählt wird. Die Verfeinerung der Sphärenteilung von $\mathfrak{S}_n^2$ gegenüber $\mathfrak{S}_{n+1}^2$ lasse mit wachsendem Index n den Durchmesser aller Zellen von $\mathfrak{W}_n^3$ unter jede Größe sinken. — Für diesen (von innen nach außen konstruierten) unendlichen Komplex von sphärischen Schalen wird ebenfalls von innen nach außen ein ganz in $\mathfrak{W}_a^3$ verbleibender Umgebungskomplex [49]) konstruiert. Dieses Umgebungssystem kann etwa als $\mathfrak{Y}^*$-System konstruiert werden. Aus der Konstruktionsweise der Umgebungen $\mathfrak{Y}^*(\mathfrak{e}^i)$ ($\mathfrak{e}^i$ seien die i-dimensionalen Zellen des vorgegebenen Komplexes) folgt, daß die Umgebungen $\mathfrak{Y}^*(\mathfrak{e}^i)$ auf der i-Zelle eine (i-1)-dimensionale M_d-Sphäre bestimmen, welche Rand einer ganz in der Zelle $\mathfrak{e}^i$ enthaltenen Zelle $\mathfrak{e}'^i$ ist. Insbesondere also werden die Umgebungen $\mathfrak{Y}^*(\mathfrak{r}_{n,k}^2)$ einen im Inneren von $\mathfrak{r}_{n,k}^2$ und dort irreduzibel gelegenen Ringstreifen $\mathfrak{r}_{n,k}'^2$ bestimmen. Die bei den gleichmäßigen Approximationen benutzten feineren Schemata und deren Umgebungssysteme können alle so gewonnen werden, daß diese Eigenschaft des Umgebungssystems bezüglich der in $\varrho_{a,k}^2$ liegenden irreduziblen Ringstreifen nicht verloren geht: es ist nur eine genügend hohe Iteration des $\mathfrak{Y}^*$-Prozesses vorzunehmen.

---

[48]) s. dort S. 539.

[49]) s. P. G. Einleitung I S. 515.

Für die nunmehr durchzuführenden gleichmäßigen M_g-Approximationen ist zu beachten, daß die M_g-Bilder der die 2-Sphären $\mathfrak{S}_n^2$ bzw. $\mathfrak{S}_{n+1}^2$ scheitelnden 1-Sphären $\mathfrak{s}_{n,k}^1$ bzw. $\mathfrak{s}_{n+1,k}^1 (k = 1, 2)$ sowie die zwischen diesen verlaufenden inneren Ringstreifen $\mathfrak{r}_{n,k}^2$ von $\mathfrak{W}^3$ innerhalb der vorgegebenen Umgebungen auf dem Ringstreifen $\varrho_{a,k}^2 (k = 1, 2)$ gelegen sein müssen [50]). Ohne Rücksicht auf die vorgeschriebenen Lagebedingungen ist die gleichmäßige Approximation des aus der Folge der sphärischen Schalen $\mathfrak{W}_n^3$ $(n = 1, 2 \cdots)$ bestehenden unendlichen Komplexes in dem Y-Umgebungskomplex möglich [51]). — Es zeigt sich nun, daß eine solche allgemeine, gleichmäßige M_g-Approximation des unendlichen Komplexes ohne wesentliche Schwierigkeiten in dem hier vorliegenden Fall in eine andere übergeführt werden kann, welche auch den oben geforderten besonderen Lagebedingungen genügt.

Es möge eine beliebige (allgemeine) gleichmäßige M_g-Approximation des Komplexes bekannt sein: $\bar{\Sigma}_n^2$ seien die M_g-Bilder der Sphären $\mathfrak{S}_n^2$ und $\bar{\sigma}_{n,k}^1$ die der 1-Sphären $\mathfrak{s}_{n,k}^1 (k = 1, 2) \cdot \bar{\varrho}_{n,k}^2$ möge das M_g-Bild der Ringstreifen $\mathfrak{r}_{n,k}^2$ sein. Die gleichmäßige M_g-Approximation ist derart durchgeführt [52]), daß alle Streckenzellen $\bar{\varepsilon}_n^1$ der Sphäre $\bar{\Sigma}_n^2$ mit absorbierenden Flächenstücken überdeckt sind. Insbesondere also liegen die 1-Sphären $\sigma_{n,k}^1$ in je einem absorbierenden Ringstreifen $\bar{\psi}_{n,k}^2$. Seine Ränder mögen durch $\varrho_{a,k}^2$ getrennt werden (s. S. 34). Über allen 0-Zellen $\bar{\varepsilon}_n^0$ der Sphäre $\bar{\Sigma}_n^2$ liegen schließlich noch absorbierende Linienstücke längs der dort einmündenden 1-Zellen von $\bar{\Sigma}_n^2$.

Die zu den 1-Sphären $\mathfrak{s}_{n,k}^1$ von $\mathfrak{S}_n^2$ nicht fremden Zellen von $\mathfrak{S}_n^2$ lassen sich zu einem Ringstreifen $\mathfrak{Z}_{n,k}^2$ zusammenfassen, welcher durch $\mathfrak{s}_{n,k}^1$ in je zwei Ringstreifen $\mathfrak{Z}_{n,k}^{\prime 2}$ und $\mathfrak{Z}_{n,k}^{*2}$ zer-

---

[50]) Die Ringstreifen $\varrho_{a,k}^2 (k = 1, 2)$ sind sowohl im Sinne der Metrik M_d als auch M_g polyedral. Der Durchschnitt $\left[\varrho_{a,k}^2 \times \mathfrak{P}\left(\mathfrak{s}_{n,k}^1\right)\right]$ ist also auch wieder ein im Sinne beider Metriken polyedraler Ringstreifen.

[51]) s. genauer in P. G. IV, 4 S. 539 ff.

[52]) s. P. G. IV, 4. 2 S. 539.

legt wird. Die entsprechenden M_g-Bilder sind $\mathsf{Z}^2_{n,k}$, $\bar{\mathsf{Z}}'^2_{n,k}$ und $\mathsf{Z}^{*2}_{n,k}$. Nach Konstruktion in P.G. [52]) gibt es über $\bar{\sigma}^1_{n,k}$ einen Absorptionsstreifen $\psi^2_{n,k}$, welcher in $\mathfrak{Y}\left(\mathfrak{s}^1_{n,k}\right)$ irreduzibel liegt und alle Punkte von $\mathsf{Z}^2_{n,k}$ enthält, welche zu $\overline{\mathfrak{Y}}\left(\mathfrak{s}^1_{n,k}\right)$ [53]) $< \mathfrak{Y}\left(\mathfrak{s}^1_{n,k}\right)$ gehören [54]). Aus der gegenseitigen Lage der Gebilde $\mathfrak{Y}\left(\mathfrak{Z}^2_{n.k}\right)$ bzw. $\mathfrak{Y}\left(\mathfrak{s}^1_{n,k}\right)$ bzw. der kleineren Umgebungen $\overline{\mathfrak{Y}}\left(\mathfrak{s}^1_{n,k}\right)$ zu dem Ringstreifen $\varrho^2_{a,k}$ folgt, daß $\varrho^2_{a,k}$ den Ringstreifen $\mathsf{Z}^2_{n,k}$ nur in dem Absorptionsstreifen $\bar{\psi}^2_{n.k}$ schneidet [55]). Bei passender Angleichung von $\bar{\mathsf{Z}}^2_{n,k}$ an $\varrho^2_{a,k}$ (bei welcher nur der Apsorptionsstreifen $\bar{\psi}^2_{n,k}$ abgeändert wird), kann das Schnittsystem $\left[\varrho^2_{a,k} \asymp \bar{\mathsf{Z}}^2_{n,k}\right]$ in ein in $\varrho^2_{a,k}$ irreduzibles und ganz innerhalb $\mathfrak{Y}\left(\mathfrak{s}^1_{n,k}\right)$ verbleibendes M_g-Polygon $\sigma^1_{n,k}$ übergeführt werden [56]). Der so aus $\bar{\mathsf{Z}}^2_{n,k}$ gewonnene neue Ringstreifen $\mathsf{Z}^2_{n,k}$ verbleibt ganz in $\mathfrak{Y}\left(\mathfrak{Z}^2_{n,k}\right)$ und wird durch $\sigma^1_{n,k}$ in zwei Ringstreifen $\mathsf{Z}'^2_{n,k}$ und $\mathsf{Z}^{*2}_{n,k}$ zerlegt, die zu verschiedenen Seiten von $\varrho^2_{a,k}$ verbleiben. — Die durch diese Angleichung erhaltenen 1-Spären $\sigma^1_{n,k}$ werden als die neuen M_g-Bilder der Sphären $\mathfrak{s}^1_{n,k}$ gesetzt. Gleichzeitig damit ergeben sich für die Ringstreifen $\mathfrak{r}^2_{n,k}$ zwischen $\mathfrak{s}^1_{n,k}$ und $\mathfrak{s}^1_{n+1,k}$ als M_g-Bilder die auf $\varrho^2_{a,k}$ irreduziblen Ringstreifen $\varrho^2_{n,k}$ zwischen $\sigma^1_{n,k}$ und $\sigma^1_{n+1,k}$. In welcher Weise sind nun durch diese Abänderungen die übrigen Zellen der allgemeinen gleichmäßigen M_g-Approximation des unendlichen Schalenkomplexes betroffen worden? Sicherlich unverändert sind alle diejenigen geblieben, welche zu $\sigma^1_{n,k}$ bzw. $\bar{\sigma}^1_{n+1,k}$ fremd waren, weil alle Abänderungen ja nur

---

[53]) s. P.G. IV, 4. 2 S. 540 und Def. des Absorptionscharakters (§ 4).

[54]) denn $\mathfrak{Y}\left(\mathfrak{Z}^2_{n,k}\right)$ enthält $\mathfrak{Y}\left(\mathfrak{s}^1_{n,k}\right)$ und damit $\overline{\mathfrak{Y}}\left(\mathfrak{s}^1_{n,k}\right)$.

[55]) da das Schnittsystem $\left[\varrho^2_{a,k} \asymp \bar{\mathsf{Z}}^2_{n,k}\right]$ ganz im Inneren von $\overline{\mathfrak{Y}}\left(\mathfrak{s}^1_{n,k}\right)$ liegt.

[56]) Das Schnittsystem enthält wenigstens ein solches Polygon, da die Ränder von $\mathsf{Z}^2_{n,k}$ innerhalb $\overline{\mathfrak{W}}^3_a$ durch $\varrho^2_{a,k}$ und die Ränder von $\left[\varrho^2_{a,k} \asymp \overline{\mathfrak{Y}}\left(\mathfrak{s}^1_{n,k}\right)\right]$ in $\mathfrak{Y}\left(\mathfrak{s}^1_{n,k}\right)$ durch $\bar{\mathsf{Z}}^2_{n,k}$ getrennt werden.

auf die Absorptionsstreifen $\bar{\psi}^2_{n,k}$ beschränkt geblieben sind. Diese Absorptionsstreifen sind bei der Angleichung in gewisse Ringstreifen $\psi^2_{n,k}$ übergegangen, die ihrerseits hinsichtlich $\sigma^1_{n,k}$ in bezug auf die Umgebungen $\mathfrak{U}\left(\mathfrak{s}^1_{n,k}\right)$ bzw. $\bar{\mathfrak{U}}\left(\mathfrak{s}^1_{n,k}\right)$ Absorptionscharakter haben. Die Umänderungen von $\bar{\psi}^2_{n,k}$ in $\psi^2_{n,k}$ gehen nur innerhalb der Umgebungen $\bar{\mathfrak{U}}\left(\mathfrak{s}^1_{n,k}\right)$ vor — d. h. $\psi^2_{n,k}$ verbleibt in $\mathfrak{U}\left(\mathfrak{s}^1_{n,k}\right)$ — und zwar so, daß die außerhalb von $\bar{\psi}^2_{n,k}$ gelegenen Punkte von $\mathfrak{Z}^2_{n,k}$ auch nach der Abänderung von $\bar{\psi}^2_{n,k}$ außerhalb von $\mathfrak{U}\left(\mathfrak{s}^1_{n,k}\right)$ verbleibt. Da die Ränder von $\psi^2_{n,k}$ also auch die von $\psi^2_{n,k}$ durch $\varrho^2_{a,k}$ getrennt werden, so enthält $\psi^2_{n,k}$ sicherlich $\sigma^1_{n,k}$. Der Absorptionsstreifen $\bar{\psi}^2_{n,k}$ ist die gleichmäßige M_g-Approximation eines radial unterteilten Ringstreifens[57]). Der Schnitt der einzelnen, radial berandeten Zellen von $\bar{\psi}^2_{n,k}$ mit $\varrho^2_{a,k}$ liegt innerhalb der Umgebungen der korrespondierenden alten Zellen. Die Angleichung ändert also nichts an dieser Beschränkung auf die Umgebung der alten Zellen. Daraus folgt, daß bei dieser Angleichung nicht nur der Ringstreifen $\psi^2_{n,k}$ als Ganzes in $\mathfrak{U}\left(\mathfrak{s}^1_{n,k}\right)$ verbleibt, sondern auch jede einzelne Zelle von $\bar{\psi}^2_{n,k}$ in eine solche übergeht, welche die Umgebung der alten nicht verläßt. Das hat zur Folge: diejenigen Zellen von $\bar{\psi}^2_{n,k}$, welche gleichzeitig dem Absorptionsstreifen einer auf $\sigma^1_{n,k}$ mündenden Querlinie[58]) $\lambda^1_{n,k}$ angehören, bleiben auch nach der Abänderung in der vorgeschriebenen Umgebung, d. h. auf dem Ringstreifen $\mathfrak{Z}^2_{n,k}$ gibt es innerhalb $\mathfrak{U}\left(l^1_{n,k}\right)$ einen Streifen, welcher als Absorptionsstreifen einer neuen Querlinie angesehen werden kann. — Es läßt sich also der Ringstreifen $\mathfrak{Z}^2_{n,k}$ durch geeignete Querlinien $\lambda^1_{n,k}$ derart in El.Fl.St.e zerlegen, daß der so unterteilte Ringstreifen $\mathfrak{Z}^2_{n,k}$ angesehen werden kann als die M_g-Approximation von $\mathfrak{Z}^2_{n,k}$. Nunmehr ist nur noch eine passende Kon-

[57]) Nämlich des Ringstreifens, dessen Zellen (die ihrerseits durch Überlagerung des ursprünglichen Schemas mit einem flächenhaften $\mathfrak{y}^*$-Schema entstanden sind) mit $\mathfrak{s}^1_{n,k}$ Punkte gemein haben (s. auch P.G. IV. 4. 2 S.539).

[58]) Siehe P.G. IV, 3. 2 S. 537.

struktion der in den Meridianebenen gelegenen Innenwände von $\mathfrak{W}_n{}^3$ vorzunehmen. Da die Ränder dieser Wände schon vorgegeben sind mit passenden absorbierenden Streifen, so kann unverändert P.G. IV, 4. 42 [59]) übertragen werden.

§ 8.

Konstruktionen von $\mathsf{Y}^*(E^2)$.

Die 2-Zelle E^2 habe den Rand $S^1 = E_1{}^0 + E_1{}^1 + E_2{}^0 + E_2{}^1 + \cdots E_n{}^0 + E_n{}^1 + E_1{}^0$. Ihre Umgebung ist $Y(E^2) = Y^*(E^2) + Y(S^1)$; $Y(S^1) = Y^*(E_1{}^0) + Y^*(E_1{}^1) + Y^*(E_2{}^0) + Y^*(E_2{}^1) + \cdots Y^*(E_n{}^0) + Y^*(E_n{}^1) + Y^*(E_1{}^0)$. Die Umgebung $Y(E^2)$ hat den Rand $S^{2(2)}$, die Rumpfumgebung $Y^*(E^2)$ den Rand $S^{*2(2)}$. $Y(S^1)$ ist ein Raumring R^3 mit dem Torus T^2 als Rand. $S^{*2(2)}$ und T^2 haben einen Ringstreifen R^{*2} mit den Rändern $S_0{}^{*1}$ und $S_u{}^{*1}$ gemein. Es gelten somit die Zerlegungen: $S^{*2(2)} = E_0{}^{*2} + S_0{}^{*1} + R^{*2} + S_u{}^{*1} + E_u{}^{*2}$ bzw. $T^2 = R^{*2} + S_0{}^{*1} + \overline{R^{*2}} + S_u{}^{*1}$, wenn $E_0{}^{*2}$ und $E_u{}^{*2}$ bzw. $\overline{R^{*2}}$ die Komplemente des abgeschlossenen Ringstreifens R^{*2} bezüglich $S^{*2(2)}$ bzw. T^2 sind. Die oben erklärte monotone topologische Deformation $\mathsf{D}^{(1)}$ zerlegt den Rand T^2 des im Inneren von R^3 liegenden M_g-Raumrings $\mathsf{P}^3 = \mathsf{Y}(S^1)$ entsprechend T^2 in: $\mathsf{T}^2 = \mathsf{P}^{*2} + \Sigma_0{}^{*1} + \overline{\mathsf{P}^{*2}} + \Sigma_u{}^{*2}$, wobei die Sphären $S_0{}^{*1}$ bzw. $S_u{}^{*1}$ in die Sphären $\Sigma_0{}^{*1}$ bzw. $\Sigma_u{}^{*1}$ längs singularitätenfreier Ringstreifen $\mathfrak{R}_0{}^{*2}$ bzw. $\mathfrak{R}_u{}^{*2}$ ineinander übergeführt werden.

Die Konstruktion von $\mathsf{Y}^*(E^2)$ ist geleistet, wenn in die Ränder $\Sigma_0{}^{*1}$ und $\Sigma_u{}^{*1}$ von P^{*2} zwei El.Fl.St.e $\mathsf{E}_0{}^{*2}$ und $\mathsf{E}_u{}^{*2}$ eingespannt werden können, die 1. paarweise fremd sind und 2. mit dem Ringstreifen P^{*2} zusammen eine M_g-Sphäre $\Sigma^{*2(2)}$ konstituieren, welche ganz im Inneren von $Y(E^2)$ verbleibt. — Der Ringstreifen P^{*2} bildet mit den Ringstreifen $\mathfrak{R}_0{}^{*2}$ und $\mathfrak{R}_u{}^{*2}$ und den El.Fl.St.en $E_0{}^{*2}$ und $E_u{}^{*2}$ zusammen eine Sphäre $\mathfrak{S}^2$. $\mathfrak{S}^2$ berandet ein El.R.St. $\mathfrak{E}^3$. Die El.Fl.St.e $\mathfrak{E}_0{}^{*2} = \mathfrak{R}_0{}^{*2} + E_0{}^{*2}$ bzw.

---

[59]) Siehe P.G. IV, 4. 42 S. 542.

$\mathfrak{E}_u{}^{*2} = \mathfrak{R}_u{}^{*2} + E_u{}^{*2}$ lassen sich unter Festhalten ihrer Ränder $\Sigma_0{}^{*1}$ bzw. $\Sigma_u{}^{*1}$ ins Innere von $\mathfrak{E}^3$ ablösen. Die Ablösung möge so vorgenommen werden, daß die durch sie entstandenen El.Fl.St.e $*\mathfrak{E}_0{}^2$ bzw. $*\mathfrak{E}_u{}^2$ fremd zueinander sind. Auch $*\mathfrak{E}_0{}^2$ und $*\mathfrak{E}_u{}^2$ bilden mit P^{*2} zusammen eine Sphäre $\mathfrak{S}^{2\,(2)} = *\mathfrak{E}_0{}^2 + \Sigma_0{}^{*1} + \mathsf{P}^{*2} + \Sigma_u{}^{*1} + *\mathfrak{E}_u{}^2$. Mittels einer genügend feinen M_g-Approximation geht $\mathfrak{S}^{2\,(2)}$ in das M_g-polyedrale, aber nur eindeutig stetige Bild $\bar{\Sigma}^{2\,(2)}$ der Sphäre $\mathfrak{S}^{2\,(2)}$ über. Es mögen von vornherein die 1-Sphären $\Sigma_0{}^{*1}$ bzw. $\Sigma_u{}^{*1}$ je in einem absorbierenden Ringstreifen $\Phi_0{}^2$ bzw. Φ_u auf T^2 liegen. Durch Anwendung des Dehnschen Lemmas geht $\bar{\Sigma}^{2\,(2)}$ über in das topologische Bild $\Sigma'^{2\,(2)} = \mathsf{E}_0{}'^2 + \Sigma_0{}'^1 + \mathsf{P}'^2 + \bar{\Sigma}_u{}'^1 + \mathsf{E}_u{}'^2$ einer Sphäre, wobei $\Sigma_0{}'^1$ bzw. $\Sigma_u{}'^1$ so gewählt werden, daß sie je innerhalb des Absorptionsstreifens $\Phi_0{}^2$ bzw. $\Phi_u{}^2$ verbleiben und einen Ringstreifen P'^2 beranden, welcher fremd zu den M_g-Bildern der El.Fl.St.e $*\mathfrak{E}_0{}^2$ bzw. $*\mathfrak{E}_u{}^2$ ist. Die El.Fl.St.e $\mathsf{E}_0{}'^2$ bzw. $\mathsf{E}_u{}'^2$ sind im allgemeinen nicht fremd zu dem Komplement $\bar{\mathsf{P}}'^2$ des Ringstreifens P'^2 bezüglich T^2. Ihr Durchschnitt mit P'^2 verbleibt aber ganz in den Absorptionsstreifen $\Phi_0{}^2$ bzw. $\Phi_u{}^2$. Durch eine Angleichung von $\mathsf{E}_0{}'^2$ bzw. $\mathsf{E}_u{}'^2$ an $\bar{\mathsf{P}}'^2$ entstehen die (paarweise fremden) El.Fl.St.e $\mathsf{E}_0{}^{*2}$ bzw. $\mathsf{E}_w{}^{*2}$. Mit dem Ringstreifen P'^2 zusammen ergibt sich die Sphäre $\Sigma^{*2\,(2)} = \mathsf{E}_0{}^{*2} + \Sigma_0{}'^1 + \mathsf{P}'^2 + \Sigma_u{}'^1 + \mathsf{E}_u{}^{*2}$, welche als Berandung der gesuchten Rumpfumgebung $\mathsf{Y}^*(E^2)$ dienen kann. — Analog zu $Y(E^2)$ wird auch $\mathsf{Y}(E^2)$ erklärt als $\mathsf{Y}(E^2) = \mathsf{Y}^*(E^2) + \mathsf{Y}(S^1)$. Auch hier ergibt sich aus der Konstruktion 1. die Fremdheit für $\mathsf{Y}^*(E_k{}^2)$ und $\mathsf{Y}^*(E_l{}^2)$ bei $k \neq l$ und 2. $\mathsf{Y}(E^2) < Y(E^2)$.

Mit dem aus den Rumpfumgebungen $\mathsf{Y}^*(E^i)$ $(i = 0, 1, 2)$ bestehenden Komplex ist auch schon die Rumpfumgebung $\mathsf{Y}^*(E^3)$ erklärt. Es sei S^2 der Rand einer 3-Zelle E^3 von $M^3(E^0, \cdots, E^3)$. Das System der Umgebungen aller Zellen von S^2 ist eine sphärische Schale W^3, welche in ihrem Inneren eine M_g-polyedrale Schale $\mathsf{F}^3 = \mathsf{Y}(S^2)$ enthält. Als $\mathsf{Y}^*(E^3)$ läßt sich dann das von dem Innenrand $\Sigma^{*2\,(3)}$ von F^3 berandete El.R.St. erklären. $\mathsf{Y}(E^3)$ ergibt sich dann als $\mathsf{Y}^*(E^3) + \mathsf{F}^3 = \mathsf{Y}^*(E^3) + \mathsf{Y}(S^2)$.

§ 9.

Die gleichmäßige M_g-Approximation $\mathsf{M}^3(\mathsf{E}^0, \cdots, \mathsf{E}^3)$ des Schemas $M^3(E^0, \cdots, E^3)$.

Die Aufgabe dieses Kapitels ist, zu einem vorgegebenen M_l-polyedralen Zellschema $M^3(E^0, \cdots, E^3)$ einer Punktmannigfaltigkeit ein auf dieser liegendes, M_g-polyedrales, $M^3(E^0, \cdots, E^3)$ gleichmäßig approximierendes Zellschema $\mathsf{M}^3(\mathsf{E}^0, \cdots, \mathsf{E}^3)$ zu finden. Eine gleichmäßige M_g-Approximation $\mathsf{M}^3(\mathsf{E}^0, \cdots, \mathsf{E}^3)$ läßt sich durch eine Reihe von el. U.en der in §§ 6-8 konstruierten Rumpfumgebungen $\mathsf{Y}^*(E^i)$ aus diesen gewinnen. Die an die $\mathsf{Y}(E^i)$ gestellte Forderung: $\mathsf{Y}(E^i) < Y(E^i)$ erweist sich deshalb als sehr nützlich, weil bei einer gleichmäßigen Approximation von $M^3(E^0, \cdots, E^3)$ für die die M_l-Zellen E^i gleichmäßig approximierenden M_g-Zellen E^i die Eigenschaft: $\mathsf{E}^i < Y(E^i)$ gefordert wird und dies infolge der Bedingung für $\mathsf{Y}(E^i)$ dadurch zu erreichen ist, daß die Zellen E^i ganz im Inneren von $Y(E^i)$ konstruiert werden.

Die Berandungen $\Sigma^{*2(2)}$ bzw. $\Sigma^{*2(1)}$ von $\mathsf{Y}^*(E^2)$ bzw. $\mathsf{Y}^*(E^1)$ lassen die Zerlegungen $\Sigma^{*2(2)} = \mathsf{E}_0^{*2} + \Sigma_0^{*1} + \mathsf{P}^{*2(2)} + \Sigma_u^{*1} + \mathsf{E}_u^{*2}$ bzw. $\Sigma^{*2(1)} = \varepsilon_1^{*2} + \sigma_1^{*1} + \mathsf{P}^{*2(1)} + \sigma_2^{*1} + \varepsilon_2^{*2}$ zu, wobei noch die Ringstreifen $\mathsf{P}^{*2(2)}$ bzw. $\mathsf{P}^{*2(1)}$ je durch 1-Zellen radial unterteilt sind derart, daß die radialen 1-Zellen von $\mathsf{P}^{*2(2)}$ Randstücke des Ringstreifens $\mathsf{P}^{*2(1)}$ und umgekehrt sind.

Gewisse der 1- bzw. 2-Zellen des aus allen $\mathsf{Y}^*(E^i)$ bestehenden Komplexes werden elementar unterteilt, und zwar wird 1. jede 2-Zelle des Ringstreifens $\mathsf{P}^{*2(2)}$ durch eine ganz in $\mathsf{P}^{*2(2)}$ verbleibende 1-Zelle $\Pi^{1(2)}$ unterteilt. Die Randpunkte $\Pi^{0(2)}$ dieser 1-Zellen $\Pi^{1(2)}$ liegen auf den radialen 1-Zellen von $\mathsf{P}^{*2(1)}$, d. h. es werden durch diese el. U. gleichzeitig auch gewisse Zellen des Randes σ^{*1} der El.Fl.St.e ε^{*2} elementar unterteilt. Ferner wird 2. in jedem El.Fl.St. ε^{*2} ein innerer Punkt ausgezeichnet: $\Pi^{0(1)}$, und dieser mit den auf dem Rande σ^{*1} von ε^{*2} liegenden 0-Zellen $\Pi^{0(2)}$ durch 1-Zellen $\Pi^{1(1)}$ verbunden. — Dieses auf dem Zellgerüst des Y*-Umgebungskomplexes liegende Streckengerüst

kann nach verschiedenen Gesichtspunkten hin zusammengefaßt werden, je nachdem man die Lage der 1- bzw. 2-Zellen $\Pi^{1(2)}$, $\Pi^{1(1)}$ bzw. $\Pi^{0(2)}$, $\Pi^{0(1)}$ auf den einzelnen Sphären $\Sigma^{*2(2)}$, $\Sigma^{*2(1)}$ oder $\Sigma^{*2(0)}$ hervorheben will.

1. Auf jeder Sphäre $\Sigma^{*2(2)}$ wird durch das konstruierte Streckengerüst eine in dem Ringstreifen $\mathsf{P}^{*2(2)}$ irreduzible 1-Sphäre $\Sigma^{1(2)}$ erklärt, welche $\Sigma^{*2(2)}$ in zwei El.Fl.St.e zerlegt. Unter Festhalten des Randes $\Sigma^{1(2)}$ wird das eine der durch $\Sigma^{1(2)}$ erklärten El.Fl.St.e ins Innere von $\Sigma^{*2(2)}$ abgelöst, wodurch ein El.Fl.St. $\mathsf{E}^{2(2)}$ entsteht.

2. Die auf der Sphäre $\Sigma^{*2(1)}$ liegenden Teile des Streckengerüstes lassen sich zu solchen Polygonzügen $\widetilde{\Pi}^1$ zusammenfassen, welche alle die beiden einzigen, auf ε_k^{*2} $(k = 1, 2)$ von $\Sigma^{*2(1)}$ liegenden 0-Zellen $\Pi_k^{0(1)}$ als gemeinsame Randzellen besitzen. Zwei aufeinanderfolgende dieser Polygonzüge werden zu einer 1-Sphäre zusammengefaßt. Das von ihr berandete, keine weiteren $\widetilde{\Pi}^1$ enthaltende El.Fl.St. werde unter Festhalten seines Randes ins Innere von $\Sigma^{*2(1)}$ abgelöst. Das abgelöste El.Fl.St. werde durch eine die Punkte $\Pi_k^{0(1)}$ $(k = 1, 2)$ seines Randes verbindende 1-Zelle $\mathsf{E}^{1(1)}$ nochmals elementar unterteilt. Schrittweise werden die Nachbarpolygonzüge $\widetilde{\Pi}^1$ mit $\mathsf{E}^{1(1)}$ zu je einer 1-Sphäre zusammengefaßt und das von dieser berandete (keine weiteren $\widetilde{\Pi}^1$ enthaltende) El.Fl.St. abgelöst. So spannt man sukzessive in alle aus $\mathsf{E}^{1(1)}$ und allen $\widetilde{\Pi}^1$ bestehenden 1-Sphären El.Fl.St. $\mathsf{E}^{2(1)}$, die eine 1-Zelle, $\mathsf{E}^{1(1)}$, gemein haben.

3. Die auf einer Sphäre $\Sigma^{*2(0)}$ liegenden Teile des Streckengerüstes lassen sich ebenfalls zu Polygonzügen Π^1 zusammenfassen, welche bis auf die Randpunkte $\Pi^{0(1)}$ fremd sind. Diese Polygonzüge ihrerseits lassen sich wieder zu 1-Sphären $\Sigma^{1(0)}$ ergänzen, die höchstens ein $\widetilde{\Pi}^1$ gemein haben. — Das von einem $\Sigma^{1(0)}$ berandete, keinen weiteren Π^1 enthaltende El.Fl.St. wird unter Festhalten seines Randes $\Sigma^{1(0)}$ ins Innere von $\Sigma^{*2(0)}$ abgelöst. Auf dem abgelösten Stück wird ein Punkt, $\mathsf{E}^{0(0)}$, angenommen und von diesem aus in dem El.Fl.St. 1-Zellen $\mathsf{E}^{1(0)}$ nach den auf dessen Rand liegenden Punkten $\Pi^{0(1)}$ konstruiert. Bei Übergang

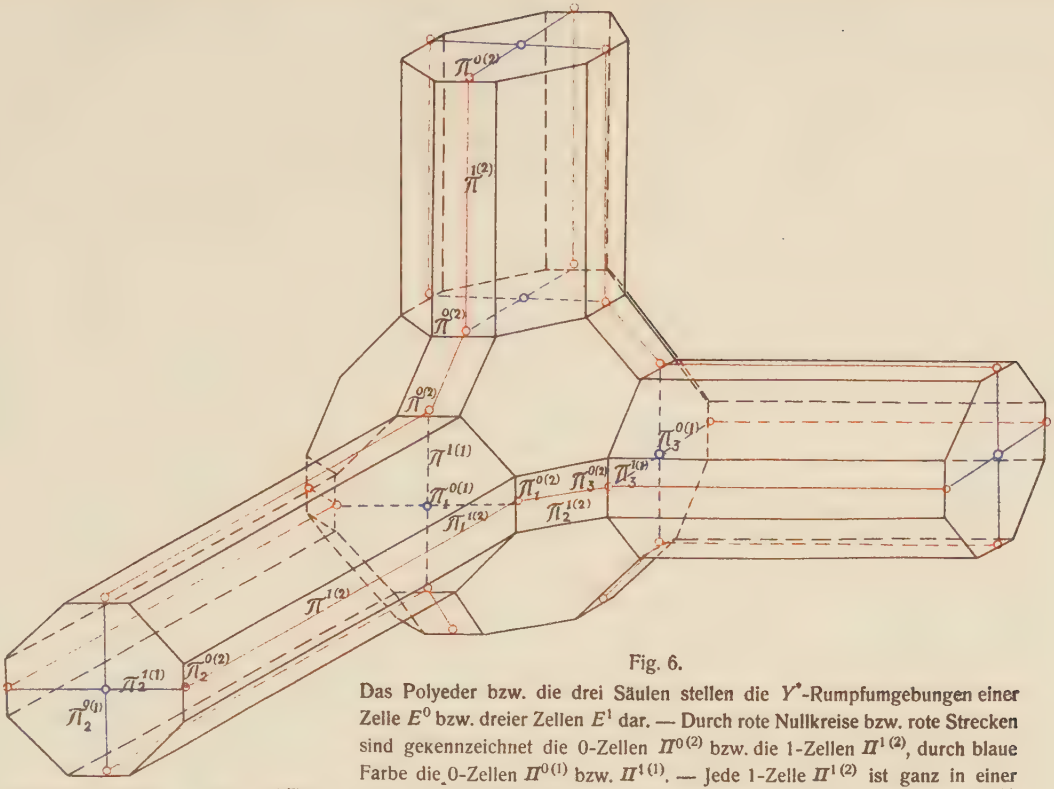

Fig. 6.

Das Polyeder bzw. die drei Säulen stellen die Y^*-Rumpfumgebungen einer Zelle E^0 bzw. dreier Zellen E^1 dar. — Durch rote Nullkreise bzw. rote Strecken sind gekennzeichnet die 0-Zellen $\Pi^{0(2)}$ bzw. die 1-Zellen $\Pi^{1(2)}$, durch blaue Farbe die 0-Zellen $\Pi^{0(1)}$ bzw. $\Pi^{1(1)}$. — Jede 1-Zelle $\Pi^{1(2)}$ ist ganz in einer zu allen sonstigen 1-Zellen $\Pi^{1(2)}$ fremden 1-Sphäre $\Sigma^{1(2)}$ enthalten. Auf den Säulen $Y^*(E^1)$ sind die beiden $\Pi_k^{0(1)}$ $(k=1,2)$ verbindbar durch Polygonzüge, z. B. $\tilde{\Pi}^1 = \Pi_1^{0(1)} + \Pi_1^{1(1)} + \Pi_1^{0(2)} + \Pi^{1(2)} + \Pi_2^{0(2)} + \Pi_2^{1(1)}\,\Pi_2^{0(1)}$ und auf $\Sigma^{*2(0)}$ durch $\tilde{\Pi}^1 = \Pi_1^{0(1)} + \Pi_1^{1(1)} + \Pi_1^{0(2)} + \Pi_2^{1(2)} + \Pi_3^{0(2)} + \Pi_3^{1(1)} + \Pi_3^{0(1)}$.

zu den benachbarten $\Sigma^{1(0)}$ wird der gemeinsame Streckenzug, Π^1 durch den seine Endpunkte $\Pi^{0(1)}$ verbindenden Streckenzug, welcher auch $E^{0(0)}$ enthält, ersetzt. Nach der Ablösung des von dieser so modifizierten 1-Sphäre berandeten El.Fl.St.s wird das abgelöste El.Fl.St. wiederum elmentar unterteilt durch die Verbindung von $E^{0(0)}$ mit den auf seinem Rande liegenden (noch freien) $\Pi^{0(1)}$. Durch Wiederholung dieses Verfahrens werden schließlich alle Punkte mit einem Punkt ($E^{0(0)}$) im Inneren von $\Sigma^{*2(0)}$ durch 1-Zellen $E^{1(0)}$ verbunden und gleichzeitig alle Polygone $\overline{\Pi}^1$ mit $E^{0(0)}$ durch eine M_g-polyedrale Dreiecksfläche $E^{2(0)}$ verbunden, deren im Inneren von $\Sigma^{*2(0)}$ verlaufende Ränder gerade die 1-Zellen $E^{1(0)}$ sind.

Der Komplex $\{E^{2(2)}, E^{2(1)}, E^{2(0)}; E^{1(1)}, E^{1(0)}; E^{0(0)}\}$ läßt sich zu einem geeigneten Komplex $\{E^2, E^1, E^0\}$ zusammenfassen, der als eine gleichmäßige M_g-Approximation Z^2 des Zellgerüstes Z^2 der Mannigfaltigkeit $M^3(E^0, \cdots, E^3)$ aufgefaßt werden kann.

§ 10.
Konstruktion eines Grundschemas.

Mit den gleichmäßigen M_g-Approximationen der letzten Paragraphen sind auf der vorgegebenen Punktmannigfaltigkeit 2-Zellzerlegungen gleicher Metrik $M^3(E^0, E^1, E^2, E^3)$ und $\overline{M}^3(\overline{E}^0, \overline{E}^1, \overline{E}^2, \overline{E}^3)$ erklärt. Ihre Zellgerüste sind Komplexe Z^2 bzw. $\overline{Z}^2$. Ein geeignetes Grundschema [60]) der beiden Zellzerlegungen $M^3(E^0, \ldots E^3)$ bzw. $\overline{M}^3(\overline{E}^0, \ldots, \overline{E}^3)$ ist durch folgende Festsetzung zu gewinnen: 1. Durch vollständige reg. U. werden beide Schemata in simpliziale Schemata übergeführt, so daß die neuen Zellen E^i bzw. $\overline{E}^i$ konvexe Zellen ihrer Mannigfaltigkeit sind. 2. Innerhalb jeder Zelle $\overline{E}^3$ liegen keine oder — ganz oder teilweise — endlich viele Zellen des Zellgerüstes Z^2. Die in $\overline{E}^3$ liegenden totalebenen bzw. totalgeraden [61]) Stücke der Zellen E^2 bzw. E^1 werden

[60]) Siehe S. 23.

[61]) Siehe Metrik eines Schemas S. 8.

bis an den Rand von $\bar{E}^3$ verlängert. Durch diese Verlängerung werden neue konvexe 3-Zellen $\tilde{E}^3$ mit den Randzellen $\tilde{E}^2$, $\tilde{E}^1$, $\tilde{E}^0$ (die Schnittfiguren des Zellgerüstes Z^2 mit dem Zellgerüst $\bar{Z}^2$ fallen auch darunter) bestimmt. Der Komplex K^3 ($\tilde{E}^3$, $\tilde{E}^2$, ..., $\tilde{E}^0$) ist ein Grundschema.

Schluß.

Konstruktion einer gemeinsamen Ableitung.

Die 3-Zellen $\tilde{E}^3$ des beschriebenen Grundschemas lassen sich das eine Mal zu den Elementarkombinationen[62] E^3, das andere Mal zu den Elementarkombinationen $\bar{E}^3$ zusammenfassen. Entsprechend mögen die 3-Zellen $\tilde{E}^3$ mit ε^3 bzw. $\bar{\varepsilon}^3$ bezeichnet werden, je nachdem sie als Bausteine der El. Kombinationen E^3 bzw. $\bar{E}^3$ aufgefaßt werden sollen.

Der kombinatorische Kern des Hauptsatzes der Topologie in drei Dimensionen ist der kombinatorische Hauptsatz der Topologie[63]).

> Zu jeder Elementarkombination von 3-Zellen läßt sich eine Reihe von el. U. der einzelnen Zellen finden, so daß die Gesamtheit der Teilzellen durch aufeinanderfolgende el. U.en einer einzigen Zelle erhalten werden kann,

oder anders ausgedrückt[64]):

> so daß die Gesamtheit der Teilzellen ein einfaches[65]) Schema ist.

Nach diesem Satz werden durch el. U.en der Zellen ε^3 die el. Komnationen E^3 zu einfachen Schemata gemacht; die 3-Zellen ε^3 gehen in die 3-Zellen η^3 und damit die 3-Zellen $\bar{\varepsilon}^3$ in die 3-Zellen $\bar{\eta}^3$ über. Die Gesamtheit der η^3 stellt eine Ableitung des Zellschemas

---

[62]) Eine dreidimensionale El. Kombination ist eine Kombination von 3-Zellen, welche ein El.R.St. darstellen.

[63]) Siehe Furch I S. 75 ff.

[64]) Siehe Furch II S. 237 ff.

[65]) Das Schema eines El.R.St.s heißt einfach, wenn es durch el. U.en einer einzigen Zelle erhalten werden kann.

M^3 dar. Falls die El. Kombinationen $\bar{E}^3$ (als aus den $\bar{\eta}^3$ aufgebaut gesehen) keine einfachen Schemata sind, werden die Zellen η^3 nochmals elementar unterteilt (wodurch die Ableitung von M^3 nur in eine andere Ableitung übergeht). Diese zweite Anwendung des kombinatorischen Hauptsatzes führt zu einer Ableitung des Zellschemas $\bar{M}^3$, welche mit einer Ableitung von M^3 identisch ist, also eine gemeinsame Ableitung von M^3 und $\bar{M}^3$ darstellt, d. h. homöomorphe Punktmannigfaltigkeiten mit je einer Zellzerlegung sind, kombinatorisch gesehen, auch elementarverwandt.

Lebenslauf.

Ich, Johannes Kusch, Sohn des Seemaschinisten Joseph Kusch zu Wismar in Mecklenburg und seiner Ehefrau Johanna geb. Schröder, wurde am 14. September 1906 zu Wismar in Mecklenburg geboren. Ich bin ev.-luth. Konfession und besitze die meckl.-schw. Staatsangehörigkeit. Ich besuchte ab Ostern 1913 fünf Jahre die Knabenmittelschule, darauf von 1918 bis 1926 die Oberrealschule in Wismar.

Vom Sommersemester 1926 bis Sommersemester 1927 studierte ich in Rostock, dann drei Semester in Göttingen, worauf ich mein Studium in Rostock fortsetzte. — Ende Februar 1929 bestand ich in Göttingen das Turnlehrerexamen und im Juli 1931 in Rostock das Staatsexamen in den Hauptfächern Mathematik und Physik. Seit 1. Oktober 1931 bin ich dem Realgymnasium zu Rostock zur Ausbildung als Studienreferendar überwiesen.

In Rostock hörte ich bei den Herren Füchtbauer, Furch, Jordan, Staude, Thomsen und in Göttingen bei: Cohn-Vossen, Courant, Herglotz, Hilbert, Nordheim, O. Oldenburg, Sponer, v. d. Waerden.

Johannes Kusch